Théorème des extrema liés

Emmanuel Hebey, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Diderot Éditeur Arts Sciences. Paragraphe 5.7.3 page 224 pour le théorème.

F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, 4[e] édition, Cassini. Exercice 129 page 408 pour l'application.

Recasage : 159, 214, 219.

Théorème 1

Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur Ω, et $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω de composantes $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Phi^{-1}(a) \neq \emptyset$. Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est tel que $f(x_0) = \min\limits_{x \in \Phi^{-1}(a)} f(x)$ et $D\Phi(x_0) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R}^n)$ est surjective, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$Df(x_0) = \lambda_1 D\Phi_1(x_0) + \cdots + \lambda_n D\Phi_n(x_0).$$

$\triangleright$ Comme $\dim(E/\operatorname{Ker} D\Phi(x_0)) = \operatorname{rg} D\Phi(x_0) = n$, il existe un sous-espace vectoriel F de dimension n tel que$E = \operatorname{Ker} D\Phi(x_0) \oplus F$. Notons χ la restriction de $D\Phi(x_0)$ à F, de sorte que χ réalise un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^n$.

– Montrons que $(D\Phi_1(x_0), \dots, D\Phi_n(x_0))$ forme une base de F^*. Comme $\dim F^* = \dim F = n$, il suffit de vérifier que la famille est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 D\Phi_1(x_0) + \cdots + \lambda_n D\Phi_n(x_0) = 0$. Comme $\operatorname{Im} D\Phi(x_0) = \mathbb{R}^n$, en notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, il existe $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $D\Phi(x_0)x_i = e_i$, $\forall i$, c'est-à-dire $D\Phi_k(x_0) = \delta_{ki}$ pour tout k, i. On obtient donc $\lambda_i = 0$ pour tout i.

– Comme $Df(x_0)_{|F} \in F^*$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in F, \qquad Df(x_0)x = \lambda_1 D\Phi_1(x_0)x + \cdots + \lambda_n D\Phi_n(x_0)x. \tag{$*$}$$

Il faut maintenant montrer que $\operatorname{Ker} D\Phi(x_0) \subset \operatorname{Ker} Df(x_0)$.

– Pour x dans un voisinage de 0, on pose $\Psi(x) = \Phi(x_0 + x) - a$ de sorte que $\Phi(0) = 0$ et $D\Psi(0) = D\Phi(x_0)$. Notons Π_1 la projection $E \to \operatorname{Ker} D\Phi(x_0$ et posons $h = \chi^{-1} \circ \psi + \pi_1$ sur un voisinage de 0. h est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$Dh(0) = D(\chi^{-1})(\psi(0)) \circ D\Psi(0) + \Pi_1 = \chi^{-1} \circ D\Phi(x_0) + \Pi_1 = \operatorname{Id}_E.$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe des voisinages U_1 et U_2 de 0 tels que h réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_1 sur U_2.

Soit Π_2 la projection $E \to F$. On a $\Pi_2 \circ h = \chi^{-1} \circ \psi$ donc $\chi \circ \Pi_2 \circ h = \Psi$. De plus, comme $D\Psi(0) = D\Phi(x_0) = \chi \circ \Pi_2$, on a $D\Psi(0) \circ h = \Psi$.

– Soit $v \in \operatorname{Ker} D\Phi(x_0)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\gamma_1 : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto tv$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $\gamma_1(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset U_2 \cap D\Phi(x_0)$. Posons alors $\gamma_2 = h^{-1} \circ \gamma_1$. On a $\Psi \circ \gamma_2 = D\Psi(0) \circ \gamma_1 = 0$. En posant $\gamma_3 = x_0 + \gamma_2$, on en déduit que γ_3 est tracé dans $\Phi^{-1}(a)$. On a $\gamma_3(0) = x_0$ et $\gamma_3'(0) = \gamma_2'(0) = Dh^{-1}(0)v = Dh(0)v = v$. Comme $f \circ \gamma_3$ atteint en 0 son minimum sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, $(f \circ \gamma_3)'(0) = 0$ *ie.* $Df(x_0)v = 0$, d'où le résultat.

– $(*)$, $E = \operatorname{Ker} D\phi(x_0) \oplus F$ et $\operatorname{Ker} D\Phi(x_0) \subset Df(x_0)$ permettent de conclure. $\square$

Proposition 2

Soit Q une forme quadratique définie positive de matrice dans la base canonique A. On note $\mathscr{E} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Q(x) = 1\}$ l'ellipsoïde associé. La fonction $\|.\|^2$ atteint :

— *son maximum global sur l'ellipsoïde $\dfrac{1}{\lambda_1}$ en les vecteurs $a \in \mathscr{E} \cap E_{\lambda_1}$,*

— *son minimum global sur l'ellipsoïde $\dfrac{1}{\lambda_n}$ en les vecteurs $b \in \mathscr{E} \cap E_{\lambda_n}$,*

où $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

$\triangleright$ On a $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$, $DQ(x)h = 2\langle h, Ax\rangle$ donc la forme linéaire $DQ(x)$ n'est pas nulle pour $x \in \mathscr{E}$. Comme $f : x \mapsto \|x\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le théorème des extrema liés, si $a \in \mathscr{E}$ réalise un extremum de f sur $\mathscr{E}$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle h, 2a\rangle = \lambda \langle h, 2Aa\rangle$$

ie. $a = \lambda Aa$ et, $f(a) = {}^t a a = \lambda Q(a) = \lambda$. Ainsi, a doit être vecteur propre de norme $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ associé à la valeur propre $\dfrac{1}{\lambda}$ de A.

Changeons de base orthonormée : on introduit les coordonnées telles que

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} x_i^2$$

où $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda_1 f(x) \leq Q(x) \leq \lambda_n f(x)$$

donc

$$\forall x \in \mathscr{E}, \qquad \frac{1}{\lambda_n} \leq f(x) \leq \frac{1}{\lambda_1}.$$

Ainsi, le maximum global $\dfrac{1}{\lambda_1}$ est atteint en les $a \in \mathscr{E} \cap E_{\lambda_1}$ et le minimum global en tout $b \in \mathscr{E} \cap E_{\lambda_n}$.

Si $\lambda_j \in]\lambda_1, \lambda_n[$, et $a \in \mathscr{E} \cap E_{\lambda_j}$, alors $f(a) = \dfrac{1}{\lambda_j}$ n'est pas un extremum global. $\square$