Théorème de Grothendieck

M. Zavidovique, *Un Max de Math*, Calvage & Mounet. Problème 30 page 180.

Recasage : 205, 208, 234.

Théorème 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilités et $p \in [1, +\infty[$. Soit S un sous-espace vectoriel fermé de $L^p_\mu(\Omega)$ tel que $S \subset L^\infty_\mu(\Omega)$. Alors S est de dimension finie.

$\triangleright$ – *Étape 1 : Les normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur S.* On a

$$\forall f \in S, \qquad \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty$$

donc l'inclusion canonique $i : (S, \|.\|_\infty) \hookrightarrow (S, \|.\|_p)$ est continue. De plus, $(S, \|.\|_p)$ est fermé dans $L^p_\mu(\Omega)$ donc $S = i^{-1}(S)$ est fermé dans $L^\infty_\mu(\Omega)$. Alors, comme $L^p_\mu(\Omega)$ et $L^\infty_\mu(\Omega)$ sont des espaces de Banach, il en va de même pour $(S, \|.\|_p)$ et $(S, \|.\|_\infty)$. Comme i est linéaire continue et surjective, d'après le théorème de l'application ouverte, il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\forall f \in S, \qquad \|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|_p.$$

– *Étape 2 : $(S, \|.\|_2) \hookrightarrow (S, \|.\|_\infty)$ est continue.*

$\star$ si $p < 2$ alors $1 < \dfrac{2}{p}$ et par l'inégalité de Hölder :

$$\forall f \in S, \qquad \int_\Omega |f|^p \times 1 \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^{p \times \frac{2}{p}} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p}{2}}$$

donc $\forall f \in S$, $\|f\|_p \leq \|f\|_2$, d'où $\|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|_2$.

$\star$ si $p \geq 2$ alors, pour $f \in S$, $|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} |f(x)|^2$ μ-p.p donc $\|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2$. On en déduit que

$$\|f\|_\infty^p \leq \alpha^p \|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2$$

d'où $\|f\|_\infty \leq \alpha^{\frac{p}{2}} \|f\|_2$.

Dans tous les cas, $\forall f \in S$, $\|f\|_\infty \leq M \|f\|_2$.

– *Étape 3 : Majorons le cardinal d'une famille orthonormée de S.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(f_1, \ldots, f_n) \in S$ une famille orthonormée dans $L^2_\mu(\Omega)$. Montrons qu'il existe Ω' de mesure pleine tel que

$$\forall x \in \Omega', \forall (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right| \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

Pour $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Q}^n$,

$$\left\|\sum i = 1^n c_i f_i\right\|_\infty \leq M \left\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\right\|_2 \underset{\text{Pythagore}}{=} M \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$$

donc il existe N_c tel que $\mu(N_c) = 0$ et

$$\forall x \in \Omega \backslash N_c, \qquad \left|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right| \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

Posons $N = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}^n} N_c$. Alors $\mu(N) \leq \sum_{c \in \mathbb{Q}^n} \mu(N_c) = 0$ et

$$\forall x \in \Omega' = \Omega \backslash N, \forall (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Q}^n, \qquad \left|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right| \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

Comme $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \left|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right|$ est continue pour chaque $x \in \Omega'$, on a

$$\forall x \in \Omega', \forall (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right| \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

Alors, pour $x \in \Omega'$, avec $c_i = f_i(x)$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i(x)^2\right)^2 \leq M^2 \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n f_i(x)^2$$

d'où $\sum_{i=1}^n f_i(x)^2 \leq M^2$. Alors, en intégrant,

$$n = \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^n f_i(x)^2 \mathrm{d}\mu(x) \leq M^2.$$

– *Conclusion :* Comme de toute famille libre de S, par Gram-Schmidt, on peut construire une famille orthonormée de même cardinal, toute famille libre de S a un cardinal $\leq M^2$. Ainsi, $\dim S \leq M^2$. □