Théorème d'Hadamard-Lévy

H. Queffélec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, 4$^{\text{e}}$ édition, Dunod. Théorème V.3 page 399.

Recasage : 204, 214, 215, 220.

Théorème 1

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
(ii) f est propre et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\det(df(x)) \neq 0$.

Rappel : Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite propre si l'image réciproque de tout compact par f est un compact.

$\triangleright$ $(i) \Rightarrow (ii)$: Ok.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Quitte à considérer $\widetilde{f} = f - f(0)$, on peut supposer $f(0) = 0$.

$\star$ Il suffit de montrer qu'il existe une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que :

— $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$,

— g est surjective.

En effet, sous ces conditions, si $x, x' \in \mathbb{R}^n$ vérifient $f(x) = f(x')$, alors il existe $y, y' \in \mathbb{R}^n$ tels que $g(y) = x$ et $g(y') = y'$ d'où $y = f(g(y)) = f(x) = f(x') = f(g(y')) = y'$ et donc $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de f. De plus, la condition $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ entraîne immédiatement que f est surjective. Ainsi, f est bijective. Comme $\det(f(x)) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, d'après le théorème d'inversion locale, f réalise un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme local. En particulier, f^{-1} est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

$\star$ On va construire une fonction régulière $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \qquad f(x(t, y)) = ty$$

et on posera $g : y \in \mathbb{R}^n \mapsto x(1, y)$. Pour $y \in \mathbb{R}^n$, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [\mathrm{d}f(x(t))]^{-1} y & \forall t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{$\mathscr{S}$}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, l'application $F : x \mapsto [\mathrm{d}f(x)]^{-1} y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $(\mathscr{S})$ admet une solution maximale $x(t, y)$ définie sur un intervalle $I =] - T^*, T^*[$, $T^* > 0$. Sur I, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t, y))) = \mathrm{d}f(x(t, y))\dot{x}(t, y) = y$$

donc, comme $f(x(0, y)) = f(0) = 0$, $\forall t \in I$, $f(x(t, y)) = ty$.

$\star$ Supposons par l'absurde que $T^* < +\infty$. Pour tout $t \in I$, on a $\|f(x(t, y))\| \leq T^* \|y\|$ donc $x(t, y) \in f^{-1}(\overline{B(0, T^* \|y\|)})$ qui est un compact (par hypothèse), ce qui contredit le théorème de sortie de tout compact. Ainsi, $T^* = +\infty$. En particulier, $x(t, y)$ existe sur $[0, 1]$ et pour $t \in [0, 1]$, $x(t, y) \in f^{-1}(\overline{B(0, \|y\|)})$.

$\star$ On peut donc définir une application $g : y \in \mathbb{R}^n \mapsto x(1, y)$. D'après les calculs précédents, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $f(g(y)) = f(x(1, y)) = y$ donc $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

$\star$ Pour démontrer la surjectivité de g, on fera usage de sa continuité. Démontrons-là. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour $\|y - y_0\| \leq 1$, on a $\|y\| \leq \|y_0\| + 1$. On définit le compact $K_0 = f^{-1}(\overline{B(0, 1 + \|y_0\|)})$ et on considère une boule fermée B_0 centrée en 0 et contenant K_0. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après ce qui précède, $x(t, y_0), x(t, y) \in K_0$ donc $\lambda x(t, y_0) + (1 - \lambda) x(t, y) \in B_0$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\dot{x}(t, y_0) - \dot{x}(t, y) = [\mathrm{d}f(x(t, y_0))]^{-1} y_0 - [\mathrm{d}f(x(t, y))]^{-1} y.$$

Alors,

$$\begin{aligned} x(t, y_0) - x(t, y) &= \int_0^t \left([\mathrm{d}f(x(s, y_0))]^{-1} y_0 - [\mathrm{d}f(x(s, y))]^{-1} y\right) \mathrm{d}s \\ &= \underbrace{\int_0^t [\mathrm{d}f(x(s, y_0))]^{-1}(y_0 - y)\mathrm{d}s}_{A} + \underbrace{\int_0^t \left\{[\mathrm{d}f(x(s, y_0))]^{-1} - [\mathrm{d}f(x(s, y))]^{-1}\right\} y\mathrm{d}s}_{B}. \end{aligned}$$

On a, pour $t \in [0,1]$:

$$\|A\| \leq \sup_{z \in B_0} \left\| [\mathrm{d}f(z)]^{-1} \right\| \|y - y_0\| \leq M \|y - y_0\|$$

et

$$\begin{aligned}
\|B\| &= \left| \int_0^t \left(\int_0^1 \mathrm{d}F\left(\lambda x(s,y_0) + (1-\lambda)x(s,y)\right).(x(s,y_0) - x(s,y))\mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \int_0^t \sup_{z \in B_0} \|\mathrm{d}F(z)\| \, \|x(s,y_0) - x(s,y)\| \, \mathrm{d}s \\
&\leq C \int_0^t \|x(s,y_0) - x(s,y)\| \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|x(t,y_0) - x(t,y)\| \leq M \|y - y_0\| + C \int_0^t \|x(s,y_0) - x(s,y)\| \, \mathrm{d}s.$$

D'après le lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\|g(y) - g(y_0)\| \leq M \|y - y_0\| e^C$$

donc g est continue.

$\star$ Pour montrer que g est surjective, comme $\mathbb{R}^n$ est connexe, il suffit de montrer que $g(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé.

– $g(\mathbb{R}^n)$ est fermé. Soit $(y_k = g(x_k))$ une suite de $g(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Alors $f(y_k) = x_k$ donc, comme f est continue, $x_k \to f(y)$. Alors, comme g est continue, $g(x_k) \to g(f(y))$. Or $g(x_k) \to y$ donc $y = g(f(y)) \in g(\mathbb{R}^n)$.

– $g(\mathbb{R}^n)$ est ouvert. **Le faire sur un dessin !** Soit $y_0 = g(x_0) \in g(\mathbb{R}^n)$. Alors $f(y_0) = x_0$ donc, d'après le théorème d'inversion locale, comme $\mathrm{d}f(y_0)$ est inversible, il existe des voisinages ouverts $U_{y_0} \in \mathcal{V}(y_0)$ et $V_{x_0} \in \mathcal{V}(x_0)$ tels que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_{y_0} sur V_{x_0}. Comme g est continue et $g(x_0) = y_0$, il existe un voisinage ouvert $W_{x_0} \subset V_{x_0}$ contenant x_0 tel que $g(W_{x_0}) \subset U_{y_0}$. Soit $x \in W_{x_0}$. On a $f^{-1}(x) \in U_{y_0}$ et $g(x) \in U_{y_0}$ et $f(f^{-1}(x)) = x = f(g(x))$ d'où, par injectivité de f sur U_{x_0}, $f^{-1}(x) = g(x)$ donc $f^{-1}(W_{x_0}) \subset g(\mathbb{R}^n)$. Comme f est continue, $f^{-1}(W_{x_0})$ est un ouvert contenant y_0 inclus dans $g(\mathbb{R}^n)$.

$\square$