Théorème des lacunes de Hadamard

H. Queffélec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, 4e édition, Dunod. Théorème IV.2 page 51 et Théorème IV.6 page 55.

Recasage : 203, 207, 241, 243

Théorème 1

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R = 1$*. Il existe un point singulier* $a \in \mathscr{C}(0,1)$.

▷ À l'oral, on ne fait que le dessin et on explique que c'est la compacité de $\overline{D(0,1)}$ qui fait marcher la chose.

On note $D = D(0,1)$.

Supposons par l'absurde que pour tout $a \in \mathscr{C}(0,1)$, il existe $r_a > 0$ tel que f admet un prolongement analytique sur le disque $D_a = D(a, r_a)$.

Tout le problème est de prouver ce qu'on voit sur le dessin : on en déduit un prolongement sur un $D(0, 1+\delta)$, ce qui contredit $R = 1$.

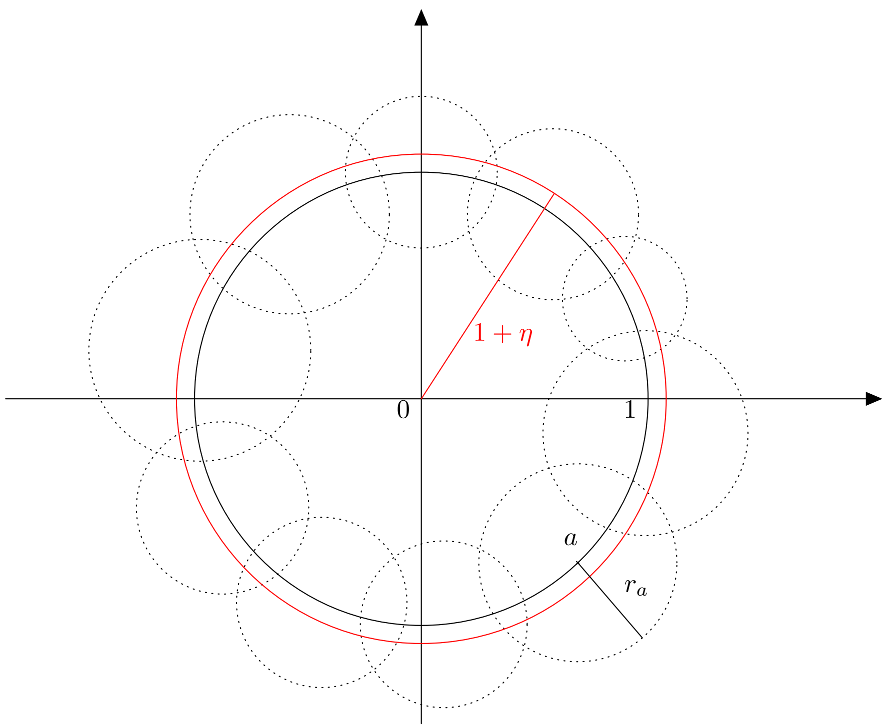

Figure 1 – Situation pour un nombre fini de boules. On pourrait s'y ramener directement grâce à la compacité de $\overline{D}$ mais on utilisera plutôt la compacité plus tard.

– *Étape 1 : Pour* $a \neq b$*, montrons que* $D_a \cap D_b \neq \emptyset \Rightarrow D \cap D_a \cap D_b \neq \emptyset$. Si $D_a \cap D_b \neq \varnothing$ alors $|a-b| < r_a + r_b$. Posons $\lambda = \dfrac{r_b}{r_a + r_b}$ et $w = \lambda a + (1-\lambda) b$. Comme a et b ne sont pas colinéaires, l'inégalité triangulaire est stricte et $|w| < 1$. De plus, $|w - a| = (1-\lambda)|b-a| < r_a$ et de même, $|w - b| < r_b$ donc on a $w \in D \cap D_a \cap D_b$.

– *Étape 2 : Pour* $a \neq b$*, montrons que* $D_a \cap D_b \neq \emptyset \Rightarrow f_a = f_b$ *sur* $D_a \cap D_b$. On a $D_a \cap D_b$ convexe donc connexe. De plus, $f_a = f_b = f$ sur $D_a \cap D_b \cap D \neq \emptyset$. D'après le théorème du prolongement analytique, $f_a = f_b$ sur $D_a \cap D_b$.

– On définit donc sans ambigüité une fonction holomorphe sur $\Omega = \displaystyle\bigcup_{a \in \mathscr{C}(0,1)} (D \cup D_a)$ par $F(z) = f_a(z)$ si $z \in D_a \cup D$.

– *Conclusion :* On peut supposer que $\forall a \in \mathscr{C}(0,1)$, $r_a < 1$ de sorte que $\Omega \subset D(0,2)$. Posons $L = \mathbb{C} \backslash \Omega$. C'est un fermé non vide de $\mathbb{C}$. De plus, $\overline{D} \subset \Omega$ donc $\overline{D}(0,1) \cap L = \emptyset$. Comme $\overline{D}$ est compact, la distance $\delta = d(\overline{D}, L)$ est strictement positive. Donc, pour $0 < \eta < \delta$, on a $D(0, 1+\eta) \subset \Omega$. F est holomorphe sur $D(0, 1+\eta)$ donc il existe une série entière

$\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ telle que

$$\forall |z| < 1+\eta, \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Comme $F_{|D} = f$, on a, par unicité du développement en série entière, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$ ce qui contredit $R = 1$.

□

Théorème 2 (*Hadamard*)

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}_*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$ une série entière de rayon de convergence 1. Alors tout point de $\mathscr{C}(0,1)$ est singulier. On dit que $\mathscr{C}(0,1)$ est une coupure de $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$.

▷ Soit un entier $p \geq 1$ tel que $p\lambda_{n+1} > (p+1)\lambda_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que la somme f de la série admette un prolongement analytique g dans $D \cup D(1,\varepsilon)$. On pose $\Omega = D \cup D(1,\varepsilon)$ et $\varphi : z \in \mathbb{C} \mapsto \dfrac{z^p + z^{p+1}}{2}$.

– – Montrons qu'il existe $R > 1$ tel que $\varphi(\overline{D}(0,R)) \subset \Omega$. On a $\varphi(1) = 1 \in \Omega$ et si $z \neq 1$, alors $|z+1| < 2$ donc

$$|\varphi(z)| = \frac{|z|^p}{2}|1+z| < 1.$$

Ainsi, $\varphi(\overline{D}) \subset \Omega$. Or φ est continue et Ω ouvert donc $\varphi^{-1}(\Omega)^c$ est un fermé, qui est non vide. Comme $\overline{D}$ est compact, la distance $\delta = d(\overline{D}, \varphi^{-1}(\Omega)^c)$ est strictement positive. Si $0 < \eta < \delta$, alors $R = 1+\eta$ vérifie $\varphi(\overline{D}(0,R)) \subset \Omega$.

– Alors, $g \circ \varphi$ est holomorphe sur $D(0,R)$. Il existe donc une série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ telle que

$$\forall |z| < R, \qquad g\left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

De plus,

$$\forall |z| < 1, \qquad g\left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right) = f\left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_n(z)$$

où P_n est un polynôme donc les degrés des monômes varient entre $p\lambda_n$ et $(p+1)\lambda_n$. En particulier, il n'y pas de mélange entre les $\left(\dfrac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n}$ pour différentes valeurs de n. Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{z_p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n} = \sum_{n=0}^{(p+1)N} b_n z^n$$

par unicité du développement en série entière. Fixons $z \in]1, R[$ et soit $w = \dfrac{z^p + z^{p+1}}{2} > 1$. Par définition de $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n w^{\lambda_n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} g(w)$$

ce qui contredit que 1 est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Ainsi, 1 est un point singulier.

– Soit $z_0 \in \mathscr{C}(0,1)$. La série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ a pour rayon de convergence 1. Donc 1 est singulier pour cette série, donc z_0 est singulier pour $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$.

□

Exemple : $\lambda_n = 2^n$, $a_n = 1$. La série entière $\sum_{n\geq 0} z^{2^n}$ admet le cercle unité comme coupure.