Théorème de Lax-Milgram

I. Nourdin, *Agrégation de mathématique épreuve orale*, 2e édition, Dunod. Théorème 1.13.1 page 50 pour le théorème
H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod. Exemple 2 page 138 pour l'application.

Recasage : 201, 205, 213, 222, 234.

Théorème 1

Soient $(H, \langle .,. \rangle, \|.\|)$ un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue coercive sur $H \times H$:

$$\exists \alpha, C > 0, \qquad |a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| \qquad a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \qquad \forall u, v \in H,$$

et ℓ une forme linéaire continue sur H. Il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \qquad a(u,v) = \ell(v).$$

Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique minimum de $J : v \in H \mapsto \dfrac{1}{2} a(v,v) - \ell(v)$.

$\triangleright$ – ℓ est une forme linéaire continue sur H donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall v \in H$, $\ell(v) = \langle f, v \rangle$.

– De même, par continuité de a, pour $u \in H$, l'application $v \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur H. Il existe donc un unique $a_u \in H$ tel que $\forall v \in H$, $a(u,v) = \langle a_u, v \rangle$. Posons $A : u \in H \mapsto a_u \in H$. Il faut donc montrer :

$$\exists! u \in H, \qquad Au = f.$$

Il suffit donc de montrer que $A : H \to H$ est bijective.

– Pour $u, v \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\forall w \in H, \qquad \langle A(u + \lambda v), w \rangle = a(u + \lambda v, w) = a(u,w) + \lambda a(v,w) = \langle Au + \lambda Av, w \rangle$$

donc $A(u + \lambda v) = Au + \lambda Av$ et A est linéaire. De plus,

$$\forall u \in H, \qquad \|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = a(u, Au) \leq C \|u\| \|Au\|$$

donc A est continue.

– De la coercivité de a, on déduit que $\forall u \in H$, $\langle Au, u \rangle = a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$ d'où $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. On en déduit également que $\operatorname{Im} A$ est fermée. En effet, si $(v_n = Au_n) \in (\operatorname{Im} A)^{\mathbb{N}}$ converge vers $v \in H$, on a :

$$\alpha \|u_p - u_q\|^2 \leq a(u_p - u_q) = \langle A(u_p - u_q), u_p - u_q \rangle \leq \|v_p - v_q\| \|u_p - u_q\|$$

d'où $\alpha \|u_p - u_q\| \leq \|v_p - v_q\| \xrightarrow[p,q \to +\infty]{} 0$ et la suite (u_n) est de Cauchy dans H. Elle converge donc vers $u \in H$. Alors, par continuité de A, on a $Au = \lim Au_n = v \in \operatorname{Im} A$.

– Pour montrer la surjectivité, il suffit donc de vérifier que $(\operatorname{Im} A)^\perp = \{0\}$. Soit $v \in (\operatorname{Im} A)^\perp$. Alors

$$0 = \langle Av, v \rangle = a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2$$

donc $v = 0$.

– On a donc montré que A est bijective. En particulier, il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall v \in H$, $a(u,v) = \ell(v)$.

– On suppose désormais que a est symétrique. Alors, pour $v \in H$,

$$J(u+v) = J(u) + a(u,v) - \ell(v) + \frac{1}{2} a(v,v) = J(u) + \frac{1}{2} a(v,v) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2} \|v\|^2$$

donc $\forall v \in H, v \neq u$, $J(v) > J(u)$ donc u est l'unique minimum de J sur H. $\square$

Application au problème de Sturm-Liouville On considère le problème

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $p \in \mathcal{C}^1([0,1]), q \in \mathcal{C}([0,1])$ et $f \in L^2(0,1)$ sont donnés avec $p(x) \geq \alpha > 0 \ \forall x \in [0,1]$ et $q \geq 0$.

La formulation variationnelle associée à ce problème est :

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \qquad \int_0^1 pu'v' + \int_0^1 quv = \int_0^1 fv.$$

On se place donc dans le cadre $H = H_0^1(0,1)$ muni de $\|.\|_{H^1(0,1)}$.

$$\forall u, v \in H_0^1(0,1), \qquad a(u,v) = \int_0^1 pu'v' + \int_0^1 quv,$$

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \qquad \ell(v) = \int_0^1 fv.$$

Pour $u, v \in H_0^1(0,1)$, on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(0,1)$,

$$|\ell(v)| \leq \int_0^1 |fv| \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)}$$

et

$$|a(u,v)| \leq \|p\|_\infty \|u'\|_{L^2(0,1)} \|v'\|_{L^2(0,1)} + \|q\|_\infty \|u\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \leq C \|u\|_{H_0^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)}$$

donc a et ℓ sont continues sur $H_0^1(0,1)$. De plus, pour $u \in H_0^1(0,1)$,

$$a(u,u) = \int_0^1 pu'^2 + \int_0^1 qu^2 \geq \alpha \|u'\|_{L^2(0,1)} \geq C \|u\|_{H^1(0,1)}$$

avec $C > 0$ d'après l'inégalité de Poincaré, donc a est coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que $a(u,v) = \ell(v)$, $\forall v \in H_0^1(0,1)$.

Remarque : On en déduit, par définition, que $pu' \in H^1(0,1)$ donc $u' = \dfrac{1}{p} pu' \in H^1(0,1)$ et donc $u \in H^2(0,1)$. Comme $pu' \in H^1(0,1)$, par intégration par parties,

$$\int_0^1 pu'v' = [pu'v]_0^1 - \int_0^1 (pu')'v = -\int_0^1 (pu')'v$$

donc

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \qquad \int_0^1 (-(pu')' + qu - f)v = 0.$$

En particulier,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[), \qquad \int_0^1 \underbrace{(-(pu')' + qu - f)}_{\in L^2(0,1)} v = 0$$

donc, par densité de $\mathcal{D}(]0,1[)$ dans L^2,

$$-(pu')' + qu = f \qquad \text{p.p.}$$

Si de plus $f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors comme $q, u \in \mathcal{C}([0,1])$, on a $pu' \in \mathcal{C}^1([0,1])$ donc $u' = \dfrac{1}{p} pu' \in \mathcal{C}^1([0,1])$ donc $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et l'égalité presque partout est vrai partout.

On a donc montré qu'il existe une unique solution faible du problème, donc une unique solution forte. De plus, cette solution faible est en fait solution forte.