Théorème de Müntz

X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, 2e édition, Ellipses. Problème 23 p. 291.

Inutilisé.

Lemme 1

Soit E un espace préhilbertien réel et $x_1, \dots, x_n \in E$. On appelle matrice de Gram de $(x_1, \dots, x_n)$ la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \le i,j \le n}$ et déterminant de Gram son déterminant, noté $G(x_1, \dots, x_n)$. C'est une matrice symétrique positive, qui est définie si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. Dans ce dernier cas, si $V = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, on a

$$\forall x \in E, \qquad d(x,V)^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_n, x)}{G(x_1, \dots, x_n)}.$$

Lemme 2

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout i, j. Alors

$$\det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \le i,j \le n}\right) = \frac{\prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - b_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \le i,j \le n} (a_i + b_j)}.$$

Théorème 3 (*Müntz*)

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante telle que $\alpha_0 = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n > 1$. $\mathrm{Vect}(x \mapsto x^{\alpha_n}, n \in \mathbb{N})$ est dense dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$ si et seulement si $\sum_{n \ge 1} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

▷ Notations : On notera x^{α_n} la fonction $x \in [0,1] \mapsto x^{\alpha_n}$. On munit $\mathcal{C}([0,1])$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $E_N = \mathrm{Vect}(x^{\alpha_i}, 0 \le i \le N)$. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\Delta_N(t) = d_{\|.\|_2}(x^t, E_N)$.

– *Étape 1 : Calculons $\Delta_N(t)$.* D'après le lemme 1, comme $(x^{\alpha_i})_{0 \le i \le N}$ est libre, on a :

$$\Delta_N(t)^2 = \frac{G(x^{\alpha_0}, \dots, x^{\alpha_N}, x^t)}{G(x^{\alpha_0}, \dots, x^{\alpha_N})}.$$

Or, pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\langle x^a, x^b \rangle = \dfrac{1}{a+b+1}$, donc, d'après le lemme 2,

$$G(x^{\alpha_0}, \dots, x^{\alpha_N}, x^t) = \frac{\prod_{0 \le i \le i < j \le N} (\alpha_j - \alpha_i)^2 \prod_{i=1}^{N} (t - \alpha_i)^2}{(2t+1) \prod_{0 \le i,j \le N} (\alpha_i + \alpha_j + 1) \prod_{i=1}^{N} (\alpha_i + t + 1)^2}$$

et

$$G(x^{\alpha_0}, \dots, x^{\alpha_N}) = \frac{\prod_{0 \le i < j \le N} (\alpha_j - \alpha_i)^2}{\prod_{0 \le i,j \le N} (\alpha_i + \alpha_j + 1)}$$

d'où

$$\Delta_N(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} \prod_{i=0}^{N} \left| \frac{\alpha_i - t}{\alpha_i + t + 1} \right|.$$

Notons $E = \mathrm{Vect}(x^{\alpha_i}, i \in \mathbb{N})$.

– *Étape 2 : Supposons que $\overline{E}^{\|\cdot\|_2} = \mathcal{C}([0,1])$. Montrons que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.* Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $t \neq \alpha_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $x^t \in \overline{E}^{\|\cdot\|_2}$ donc la suite $(\Delta_N(t))_{N\in\mathbb{N}})$ tend vers 0. Ainsi,

$$\prod_{i=0}^{N} \left| \frac{\alpha_i - t}{\alpha_i + t + 1} \right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \qquad (*)$$

$\star$ 1$^{\text{er}}$ cas : $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors le résultat est vrai.

$\star$ 2$^{\text{e}}$ cas : $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0$, $\alpha_n > t$. D'après $(*)$, $\sum_{n=N_0}^{+\infty} \ln\left(\frac{\alpha_n - t}{\alpha_n + t + 1}\right) = -\infty$. Or,

$$\ln\left(\frac{\alpha_n - t}{\alpha_n + t + 1}\right) = \ln\left(1 - \frac{2t+1}{\alpha_n + t + 1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2t+1}{\alpha_n}.$$

D'après le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geq N_0} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

– *Étape 3 : Supposons que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge. Montrons que $\overline{E}^{\|\cdot\|_2} = \mathcal{C}([0,1])$.* D'après le théorème de Weierstrass, comme $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$, il suffit de montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$, $x^m \in \overline{E}^{\|\cdot\|_2}$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{i=0}^{N} \left| \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right| = 0.$$

$\star$ 1$^{\text{er}}$ cas : $m = \alpha_{n_0}$, alors le résultat est vrai.

$\star$ 2$^{\text{e}}$ cas : si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\left|\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1}\right| \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left|\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1}\right|$ diverge (grossièrement) d'où le résultat.

$\star$ 3$^{\text{e}}$ cas : si $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors comme précédemment, $\ln\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2m+1}{\alpha_n}$ donc d'après le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq N_0} \ln\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1}\right) = -\infty$ d'où le résultat.

– *Étape 4 : Montrons que $\overline{E}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}([0,1])$ si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.* Si $\overline{E}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}([0,1])$ alors, comme $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$, $E^{\|\cdot\|_2} = \mathcal{C}([0,1])$ et d'après ce qui précède, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Réciproquement, supposons que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge. Comme $\lim \alpha_n > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_N > 1$ et on peut supposer $\alpha_1 > 1$ (en n'enlevant qu'un nombre fini de termes à la série). D'après le théorème de Weierstrass, il suffit de montrer que tout polynôme P est dans $\overline{E}^{\|\cdot\|_\infty}$. Soient p un polynôme et $\varepsilon > 0$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n - 1}$ diverge donc, d'après ce qui précède, il existe $g \in \operatorname{Vect}(x^{\alpha_n - 1}, n \in \mathbb{N}^*)$ tel que $\|p' - g\|_2 \leq \varepsilon$. Notons h la primitive de g telle que $h(0) = P(0)$ et $q = h - p$. Alors, $h \in E$ et

$$\forall x \in [0,1], \qquad q(x) = \int_0^x q'(t)\mathrm{d}t$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|q(x)| \leq \left(\int_0^x q'(t)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \sqrt{x} \leq \|q'\|_2 = \|p' - g\|_2 \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\|p - h\|_\infty \leq \varepsilon$ donc $p \in \overline{E}^{\|\cdot\|_\infty}$. $\square$