Théorème de stabilité en première approximation

F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, 4e édition, Cassini. Exercice 46 page 138.

Recasage : 220, 221.

Théorème 1

On considère le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $f(0) = 0$. Si $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors 0 est un équilibre asymptotiquement stable de $(\mathcal{S})$.

$\triangleright$ Notons $A = Df(0)$.

– *Étape 1. Montrons que 0 est un équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé :* (pas le temps)

$$(\mathcal{L}) \qquad \begin{cases} z' = Az \\ z(0) = y_0 \end{cases}$$

La solution de cette équation différentielle est donnée par $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = e^{tA}y_0$.

D'après le lemme des noyaux, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A et $m_1, \dots, m_k$ leurs multiplicités respectives, on a :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{m_i}}_{E_i}.$$

Écrivons la donnée initiale y_0 dans cette décomposition : $y_0 = y_1 + \cdots + y_k$. Soit $i \in [\![1, k]\!]$. On a :

$$e^{tA}y_i = e^{t\lambda_i}e^{t(A-\lambda_i I_n)}y_i = e^{t\lambda_i}\sum_{i=0}^{m_i-1}\frac{t^p}{p!}(A - \lambda_i I_n)^p y_i.$$

Alors, pour $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$:

$$\left\|e^{tA}y_i\right\| \leq e^{t\mathrm{Re}\lambda_i}C_i(1 + |t|^{m_i-1})\|y_i\| \leq C_i e^{t\mathrm{Re}\lambda_i}(1 + |t|^{n-1})\|y_i\|.$$

On en déduit que

$$\left\|e^{tA}y_0\right\| \leq \sum_{i=1}^{k}\left\|e^{tA}y_i\right\| \leq C(1 + |t|^{n-1})\left(\max_{i=1}^{k}\|y_i\|\right)\left(\sum_{i=1}^{k}e^{t\mathrm{Re}\lambda_i}\right).$$

Notons $a > 0$ un réel tel que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\mathrm{Re}\lambda_i \leq -a < 0$. Alors, pour une constante $C > 0$, par équivalence des normes, on a

$$\|z(t)\| = \left\|e^{tA}y_0\right\| \leq Ce^{-at}\|y_0\|$$

et 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

– *Étape 2. Cherchons une fonction de Lyapunov pour le système linéarisé.* Pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et ce qui précède,

$$|\langle e^{tA}x_1, e^{tA}x_2\rangle| \leq \left\|e^{tA}x_1\right\|\left\|e^{tA}x_2\right\| \leq C^2e^{-2ta}\|x_1\|\|x_2\|.$$

Ainsi, l'application

$$b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty}\langle e^{tA}x_1, e^{tA}x_2\rangle \mathrm{d}t \end{array}$$

est bien définie, et est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. Notons q la forme quadratique associée. Pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x) = \int_0^{+\infty}\left\|e^{tA}x\right\|^2\mathrm{d}t \geq 0$$

et $q(x) = 0$ si et seulement si, par continuité de la fonction $t \mapsto \left\|e^{tA}x\right\|^2$, $\forall t \geq 0$, $\left\|e^{tA}x\right\| = 0$ *ie.* $x = 0$. q est donc définie positive.

Pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, $q(x_1 + tx_2) = q(x_1) + 2tb(x_1, x_2) + t^2 q(x_2)$ donc, comme q est différentiable sur $\mathbb{R}^n$, pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}q(x_1).x_2 = 2b(x_1, x_2)$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla q(x), Ax \rangle = 2b(x, Ax) = \int_0^\infty \underbrace{2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|e^{tA}x\|^2} \mathrm{d}t = \left[\left\| e^{tA}x \right\|^2 \right]_0^\infty = -\|x\|^2$$

par hypothèse sur A. En particulier, q est une fonction de Lyapunov stricte pour A.

– *Étape 3. Application au problème non-linéaire.* Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, le problème $(\mathcal{S})$ admet une unique solution maximale y définie sur $I =]T^-, T^+[$, $T^- < 0 < T^+$. On pose $r(y) = f(y) - Ay$. Sur I, on a :

$$q(y)' = \mathrm{d}q(y).y' = 2b(y, y') = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)).$$

Or, b étant symétrique définie positive, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|b(y, r(y))| \leq \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $r(y) = f(y) - f(0) - \mathrm{d}f(0)y$ et f est $\mathcal{C}^1$, par équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $q(y) \leq \alpha$, $\sqrt{q(r(y))} \leq \varepsilon\sqrt{q(y)}$. Alors, pour $q(y) \leq \alpha$, $b(y, r(y)) \leq 2\varepsilon q(y)$. Or, par équivalence des normes, $Cq(y) \leq \|y\|^2$, donc

$$q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leq -(C - 2\varepsilon)q(y).$$

Ainsi, pour $0 < \varepsilon < C/2$, on a :

$$\forall t \in I, \qquad q(y(t)) \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad q(y)'(t) \leq -\beta q(y(t)) \tag{*}$$

avec $\beta > 0$.

– *Conclusion.* Supposons par l'absurde qu'il existe $t \in I$ tel que $q(y(t)) > \alpha$. Soit alors $t_0 = \min\{t \in I \cap \mathbb{R}_+, q(y(t)) = \alpha\}$. On a $q(y(t_0)) = \alpha$ donc d'après $(*)$, $q(y)'(t_0) \leq -\beta q(y(t_0)) < 0$. On en déduit qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in]t_0, -\delta, t_0[, \qquad q(y(t)) > q(y(t_0)) = \alpha$$

ce qui contredit la définition de t_0. Ainsi,

$$\forall t \in I, \qquad q(y(t)) \leq \alpha.$$

D'après le théorème de sortie de tout compact, on en déduit que $T^+ = +\infty$. Alors, d'après $(*)$, pour $t \geq 0$,

$$q(y(t)) = q(y_0) - \beta \int_0^t q(y(s))\mathrm{d}s$$

d'où, d'après le lemme de Gronwall,

$$\forall t \geq 0, \qquad q(y(t)) \leq q(y_0)e^{-\beta t}$$

et, en particulier, $y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. $\square$