Théorème de structure des groupes abéliens finis

P. Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre*, 2011, Éditions de l'École polytechnique.. Proposition I.2.28, Lemme I.2.32 et Théorème I.2.33 page 250.

Recasage : 102, 104, 107, 110.

Lemme 1

Soit G un groupe abélien fini. L'application

$$i: \begin{array}{ccc} G & \to & \widehat{\widehat{G}} \\ g & \mapsto & (\chi \mapsto \chi(g)) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

▷ – *Étape 1 : i est un morphisme de groupes.*

– *Étape 2 : $|G| = |\widehat{\widehat{G}}|$.* Comme G est abélien, les classes de conjugaison sont réduites à un élément et sont au nombre de $|G|$. De plus, comme G est abélien, $\widehat{G}$ est l'ensemble des caractères irréductibles de G. D'après la formule de Burnside, on a alors $|\widehat{G}| = |G|$. Comme $\widehat{G}$ est abélien, le même raisonnement montre que $|\widehat{\widehat{G}}| = |\widehat{G}| = |G|$. Il suffit donc de montrer le point suivant.

– *Étape 3 : i est injectif.* Soit $g \in G$ tel que $i(g) = i(e)$. Alors, $\forall \chi \in \widehat{G}$, $\chi(g) = \chi(e) = 1$. Notons $\mathbf{1}_{\{g\}} : h \in G \mapsto \delta_{gh}$ et décomposons-là dans la base des caractères :

$$\mathbf{1}_{\{g\}} = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle \mathbf{1}_{\{g\}}, \chi \rangle \chi = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \mathbf{1}_{\{g\}} \overline{\chi(h)} \right) \chi = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \frac{\overline{\chi(g)}}{|G|} \chi = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi.$$

En évaluant cette égalité en e, on obtient :

$$\mathbf{1}_{\{g\}}(e) = \frac{|\widehat{G}|}{|G|} = 1$$

donc $g = e$, et i est injectif. □

Lemme 2

Soit G un groupe abélien fini. Alors G et $\widehat{G}$ ont même exposant.

▷ Notons $N_G, N_{\widehat{G}}$ les exposants respectifs de G et $\widehat{G}$. Pour $\chi \in \widehat{G}$, on a :

$$\forall g \in G, \qquad \chi^{N_G}(g) = \chi(g)^{N_G} = \chi(g^{N_G}) = \chi(e) = 1$$

donc $N_2 \leq N_1$. Le même raisonnement montre que $N_{\widehat{\widehat{G}}} \leq N_{\widehat{G}}$. Or $\widehat{\widehat{G}} \simeq G$ donc $N_G = N_{\widehat{\widehat{G}}} \leq N_{\widehat{G}} \leq N_G$ donc $N_G = N_{\widehat{G}}$. □

Théorème 3

Soit G un groupe abélien fini. Il existe $r \in \mathbb{N}$, $N_1, \dots, N_r \in \mathbb{N}$ avec N_1 l'exposant de G, tels que $\forall 1 \leq i \leq r-1$, $N_{i+1} | N_i$ et $G \simeq \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$.

▷ On procède par récurrence forte sur $n = |G|$.

– $n = 1$: ok.

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le théorème est vrai pour tout groupe abélien de cardinal $\leq n$. Soit un groupe abélien G de cardinal $n+1$. Notons N_1 l'exposant de G. Comme $\widehat{G}$ est abélien, son exposant (égal à N_1 d'après le lemme) est le maximum des ordres de ses éléments. Soit donc $\chi_1 \in \widehat{G}$ d'ordre N_1.

⋆ *Étape 1 : $\chi_1(G) = \mathbb{U}_{N_1}$, le groupe des racines N_1-ièmes de l'unité.* En effet,$\chi_1(G)$ en est un sous-groupe car $\chi_1^{N_1} \equiv 1$. De plus, si, par l'absurde $|\chi(G)| < N_1$ alors pour tout $g \in G$, l'ordre de $\chi(g)$ dans $\mathbb{U}_{N_1}$ est $< N_1$. Alors, l'exposant

N_2 de $\chi(G)$ vérifie $N_2 < N_1$, *ie.* $\chi^{N_2} \equiv 1$, ce qui contredit le fait que χ_1 est d'ordre N_1.

$\star$ *Étape 2 : $G \simeq \mathbb{Z}/_{N_1\mathbb{Z}} \times G_1$ avec $|G_1| \leq n$.* Soit x_1 tel que $\chi(x_1) = e^{2i\pi/N_1}$. Alors x_1 est d'ordre N_1 donc $H_1 = \langle x_1 \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/_{N_1\mathbb{Z}}$. Si $N_1 = |G|$, alors on a démontré le résultat. On suppose désormais $N_1 \neq |G|$. Posons $G_1 = \operatorname{Ker} \chi_1$. On a bien $|G_1| \leq n$. χ_1 induit un morphisme surjectif de H_1 sur $\mathbb{U}_{N_1}$. Par égalité des cardinaux finis, il est bijectif. Notons α sa réciproque et montrons que $G = H_1 G_1$. Si $x \in G$, alors $a = \alpha(\chi_1(x)) \in H_1$ et $b = a^{-1}x$ vérifie $\chi_1(b) = \chi_1(a)^{-1}\chi_1(x) = 1$ donc $b \in G_1$ et on a bien $x \in H_1 G_1$. Comme de plus $H_1 \cap G_1 = \{1\}$ par injectivité de χ_1 sur H_1, on en déduit que $G \simeq H_1 \times G_1$.

$\star$ On conclut par hypothèse de récurrence car $|G_1| \leq n$. $\square$