Théorème de Weierstrass par Bernstein

H. Queffélec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, 4e édition, Dunod. Théorème II.3 page 518 pour le théorème et Exemple IV.1 page 247 pour le lemme.

Recasage : 201, 202, 209, 228, 241, 260, 264.

Théorème 1

Soient $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et ω son module de continuité uniforme :

$$\forall h \geq 0, \qquad \omega(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|,\, |x-y| \leq h\}.$$

Pour $n \geq 1$, on pose $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Alors

$$\forall n \geq 1, \qquad \|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et cette estimation est optimale.

On aura besoin des résultats suivants sur le module de continuité uniforme d'une fonction continue.

Lemme 2

ω est une fonction croissante, sous-additive, telle que

$$\forall h, \lambda \geq 0, \qquad \omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h).$$

▷ – Si $h \leq h'$ alors $\{|f(x)-f(y)|,\, |x-y| \leq h\} \subset \{|f(x) - f(y),\, |x-y| \leq h'\}$ donc $\omega(h) \leq \omega(h')$.

– Si $h, h' \in \mathbb{R}_+$ et $|x-y| \leq h + h'$, soit z tel que $|x-z| \leq h$ et $|z-y| \leq h'$. Alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq \omega(h) + \omega(h')$$

donc $\omega(h+h') \leq \omega(h) + \omega(h')$.

– On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega(nh) \leq n\omega(h)$.

– Soit $h, \lambda \geq 0$. Comme $\lfloor \lambda \rfloor \leq \lambda \leq \lfloor \lambda \rfloor + 1$, d'après les points précédents :

$$\omega(\lambda h) \leq \omega((\lfloor \lambda \rfloor + 1)h) \leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\omega(h) \leq (\lambda+1)\omega(h).$$

□

On peut désormais démontrer le théorème.

▷ Soit $x \in [0,1]$. Considérons $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $b(x)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. On a $\mathbb{E}[S_n] = nx$ et $\mathrm{Var}(S_n) = nx(1-x)$ et

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(x).$$

Alors,

$$|f(x) - B_n(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right].$$

D'après le lemme, on a donc

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| \quad &\leq \quad \left(\sqrt{n}\mathbb{E}\left[\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right] + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&\leq \quad \left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&\underset{\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2}{\leq} \quad \left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Or $x = \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]$ donc $\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2 = \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$ d'où

$$|f(x) - B_n(x)| \leq (1 + x(1-x))\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Ainsi, $\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. □

Exhibons une fonction f telle que $\|f - B_n\|_\infty \geq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ avec $C > 0$. Considérons $f : x \in [0,1] \mapsto \left|x - \frac{1}{2}\right|$. D'après la deuxième inégalité triangulaire, $\omega(h) \leq h$. De plus,

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \left|B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right|\right] = \frac{1}{2n}\mathbb{E}[2S_n - n] = \frac{1}{2n}\mathbb{E}[\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n]$$

où pour tout k on a posé $\varepsilon_k = 2X_k - 1$ de sorte que les $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et suivent la loi de Rademacher.

On conclut grâce au lemme suivant.

Lemme 3 (*Khintchine*)

$\|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n\|_1 \geq \sqrt{\frac{n}{e}}$.

▷ Notons $s = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$. Soit $g \in L^\infty$. On a $\mathbb{E}[|sg|] \leq \|s\|_1 \|g\|_\infty$ donc si $g \neq 0$, $\|s\|_1 \geq \frac{\mathbb{E}[|sg|]}{\|g\|_\infty} \geq \frac{|\mathbb{E}[sg]|}{\|g\|_\infty}$.

Posons $g = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + i\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{n}}\right)$. Alors

$$|g(\omega)| = \prod_{j=1}^{n}\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_j^2}{n}} = \prod_{j=1}^{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq \prod_{j=1}^{n}\sqrt{e^{1/n}} = \sqrt{e}$$

car $1 + x \leq e^x, \forall x$. Ainsi, $\|g\|_\infty \leq \sqrt{e}$. De plus,

$$\mathbb{E}[sg] = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\varepsilon_k \prod_{j=1}^{n}\left(1 + i\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{n}}\right)\right] \underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\varepsilon_k\left(1 + i\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\frac{i}{\sqrt{n}} = i\sqrt{n}.$$

Ainsi,

$$\|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n\|_1 \geq \sqrt{\frac{n}{e}}.$$

□