Théorèmes de Dini et Glivenko-Cantelli

X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, 2e édition, Ellipses. Exercice 5 page 228
Y. Nourdin, *Agrégation de mathématiques épreuve orale*, 2e édition, Dunod. Théorème 1.25.9 page 109

Recasage : 228, 229, 241, 262, 263

Théorème 1 (***Deuxième théorème de Dini***)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles croissantes[1] *définies sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.*

▷ – f est continue sur le compact $[a,b]$ donc, d'après le théorème de Heine, f y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a,b], \qquad |x-y| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

– Donnons-nous une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de pas $< \eta$. Comme $f_n(x_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe $N \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \qquad |f(x_i) - f_n(x_i)| \leq \varepsilon.$$

– Soient $x \in [a,b]$ et i tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$. On a, comme les f_n sont croissantes,

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(x)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + f_n(x) - f_n(x_i) \\ &\leq 2\varepsilon + f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i) \\ &\leq 2\varepsilon + |f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| \\ &\leq 5\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 2

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid. Soit F la fonction de répartition commune des X_n. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k \leq t\}}.$$

Alors, presque sûrement, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

▷ D'après la loi forme des grands nombres, $F_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(t)$ presque sûrement. On veut une convergence uniforme en t. Comme les F_n sont croissantes, on pense au théorème de Dini. Problème : il n'y a pas de continuité et on ne travaille pas sur un compact. On s'y ramène grâce à l'inverse généralisé.

Lemme 3

On définit $F^{\leftarrow} : u \in [0,1] \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq u\}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall u \in [0,1], \quad F^{\leftarrow}(u) \leq x \quad \Longleftrightarrow \quad u \leq F(x).$$

▷ – Si $F^{\leftarrow}(u) \leq x$ alors il existe $y \leq x$ tel que $F(y) \geq u$. Comme F est croissante, $F(x) \geq F(y) \geq u$.
– Si $u \leq F(x)$ alors $x \in \{y \in \mathbb{R},\ F(y) \geq u\}$ donc $x \geq \inf\{y \in \mathbb{R},\ F(y) \geq u\} = F^{\leftarrow}(u)$. □

Corollaire 4

Si Y est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition G et $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ alors $G^{\leftarrow}(U)$ a la même loi que Y.

▷ On a $\mathbb{P}(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq G(x)) = G(x)$. □

– On se ramène alors au cas de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur [0,1]. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes suivant la loi normale sur $[0,1]$. On a l'égalité de loi suivante :

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \sim \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{F^{\leftarrow}(U_k) \leq t\}} - F(t) \right| &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{U_k \leq F(t)} - F(t) \right| \\ &\leq \sup_{s\in[0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k \leq s\}} - s \right|. \end{aligned}$$

1. Contrairement à ce qui est écrit dans le Gourdon, il n'est pas nécessaire que les f_n soient continues.

Il suffit donc de traiter le cas de variables uniformes sur $[0,1]$.

– D'après la loi forte des grands nombres, pour tout $s \in [0,1]$, il existe $N_s \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(N_s) = 0$ et

$$\forall \omega \in N_s^c, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega) \leq s\}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} s.$$

Comme une réunion dénombrable de négligeables est négligeable, il existe $N \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0$ et

$$\forall s \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \forall \omega \in N^c, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega) \leq s\}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} s.$$

C'est encore vrai pour tout $s \in [0,1]$. En effet, soient $s \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$ et $\omega \in N$. Il existe $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $s - \varepsilon \leq p \leq s \leq q \leq s + \varepsilon$. Comme $s \mapsto \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega) \leq s\}}$ est croissante,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega) \leq p\}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega) \leq s\}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega) \leq q\}}$$

d'où

$$s - \varepsilon \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega) \leq s\}} \leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega) \leq s\}} \leq s + \varepsilon,$$

d'où le résultat.

– On a donc montré, pour $\omega \in N^c$,

- ⋆ $s \mapsto \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega) \leq s\}}$ est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- ⋆ $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k(\omega) \leq s\}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} s$ et $s \mapsto s$ continue.

D'après le théorème de Dini, on a donc convergence uniforme presque partout. □