Leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.

Développements :

Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$. Table de caractères et sous-groupes distingués.

Bibliographie :

Ulmer, H2G2 tome 2

Plan

Soit G un groupe fini dont on note e le neutre.

1 Représentation d'un groupe fini

1.1 Vocabulaire et premiers exemples

Définition 1 (H2G2 p. 443). représentation linéaire de G

Définition 2 (H2G2 p. 443). degré d'une représentation

Remarque 3 (H2G2 p. 444). c'est une action

Remarque 4 (H2G2 p. 444). Représentation matricielle avec choix d'une base

Définition 5 (H2G2 p. 443). représentation fidèle

Exemple 6 (H2G2 p. 444). La représentation triviale

Exemple 7 (H2G2 p. 444). La représentation régulière

Exemple 8 (Ulm p. 145). La représentation par permutation

Exemple 9 (H2G2 p. 444). Représentation de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

1.2 La fabrique de représentations

Proposition 10 (H2G2 p. 444-445). *A partir de deux représentations, on peut en fabriquer sur la somme directe, le dual, $Hom(V,W)$.*

1.3 Sous-représentations et morphismes de représentations

Définition 11 (Ulm p.146). Morphisme de représentation, isomorphisme de représentation

Exemple 12 (Ulm p.146). le moyenniseur

Définition 13 (Ulm p.146). Sous représentation

Proposition 14 (Ulm p.147). *Le noyau et l'image d'un morphisme de représentation sont des sous-représentations.*

Définition 15 (Ulm p.148). L'ensemble des points fixes V^G

Proposition 16 (Ulm p.148-149 ou H2G2 p. 452 mieux écrit). *V^G est une sous-représentation et c'est un projecteur*

Remarque 17 (Ulm p.148). $Hom_G(V_1, V_2) = Hom(V_1, V_2)^G$

Exemple 18 (Ulm p.148). Point fixe pour la représentation par permutations

1.4 Représentations irréductibles

Définition 19 (H2G2 p.443). Représentation irréductible (ou simple)

Exemple 20. Une représentation de degré 1 est irréductible

Définition 21 (H2G2 p.448). représentation complétement réductible (ou semi-simple)

Théorème 22 (H2G2 p.448). *Maschke*

Remarque 23 (H2G2 p.448). Tout sev ne possède pas un supplémentaire stable

Corollaire 24 (H2G2 p.450). *Toute représentation se décompose en somme directe de représentations irréductibles*

Lemme 25 (H2G2 p.447). *Lemme de Schur*

2 Caractères

2.1 Vocabulaire

Définition 26 (Ulm p. 150). fonction centrale

Proposition 27 (Ulm p. 150). *forme un $\mathbb{C}$-ev*

Définition 28 (Ulm p. 150). Caractère, degré du caractère

Remarque 29 (Ulm p. 150). Deux représentations isomorphes ont même caractère

Remarque 30 (Ulm p. 150). Un caractère est une fonction centrale

Exemple 31 (Ulm p. 150). Signature

Exemple 32 (Ulm p. 150). Caractère de la représentation par permutation

Exemple 33 (Ulm p. 151). Caractère de la représentation régulière

2.2 Fabrique des caractères

Proposition 34 (Ulm p. 152)**.** *Caractère de la somme directe, du dual, de $Hom(V,W)$.*

Application 35 (H2G2 p. 456)**.** $(\chi,\chi') = dimHom(V,V')^G$

2.3 Caractères irréductibles

Définition 36 (Ulm p. 152)**.** Caractère irréductible

Remarque 37 (Ulm p. 152)*.* Un caractère est somme de caractères irréductibles

Théorème 38 (Ulm p. 152)**.** *Produit scalaire, les caractères irréductibles forment une b.o.n*

Corollaire 39 (Ulm p. 154)**.** *Formule de décomposition d'un caractère*

Application 40 (H2G2 p. 466-467)**.** Application à la représentation régulière : un caractère apparait $deg(\chi)$ fois dans la décomposition de la représentation régulière. De plus $Card(G) = \sum_{\chi\in Irr(G)} \chi(e)^2$ et $0 = \sum_{\chi\in Irr(G)} \chi(g)\chi(e)$

Corollaire 41. *Le nombre de caractères irréductibles est égal au nombre de classes de conjuguaison*

Corollaire 42 (Ulm p. 154)**.** *χ irréductible ssi $(\chi,\chi) = 1$*

Corollaire 43 (Ulm p. 154)**.** *Isomorphes ssi mêmes caractères*

Proposition 44 (Ulm p. 157)**.** *Cas où G est abélien*

3 Table de caractères

3.1 Construction

Définition 45 (H2G2 p. 469)**.** Table de caractère

Proposition 46. *La table est carrée : 41*
Les lignes sont orthogonales : 38
Relation sur les colonnes : 40 [H2G2 p.469]

Application 47. Construction de la table de $\mathfrak{S}_4$

3.2 Lecture

3.2.1 Sous groupes distingués

Proposition 48 (Ulm p.158)**.** *égalités entre $\chi(g)$ et $\chi(e)$*

Définition 49 (Ulm p.158)**.** Noyau d'un caractère

Proposition 50 (Ulm p.158)**.** *Lien avec les sous-groupes distingués*

Application 51 (Ulm p.159)**.** Application à une table de caractère

Corollaire 52. *CNS pour que G soit simple*

3.2.2 Sous-groupe dérivé

Proposition 53 (Ulm p.157+ H2G2 ex F.27 p.494)**.** *ordre du groupe dérivé à partir des caractères + retrouver le groupe dérivé*

Exemple 54. Ex sur une table de caractères