Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Développements :

Invariants de similitude (Réduction de Frobenius), Théorème des extrema liés

Bibliographie :

Grifone, Gourdon Algèbre, Nourdin, Objectif agrégation, Calais, Jack Daniel Mercier (JDM)

Notes

Plan librement inspiré de celui présenté par Marie Derrien et Charline Le Guen.

Plan

E est un espace vectoriel sur un corps K (commutatif).

1 Théorie de la dimension

1.1 Familles libres, génératrices, bases

Définition 1 (Grif p10,12,13). Famille libre, génératrice. Base

Exemple 2 (Gri p.10-14).

Proposition 3 (Gri p14). *Sur-famille d'une famille génératrice. Sous-famille d'une famille libre.*

1.2 Existence de bases d'un espace vectoriel

Définition 4 (Gri p11). Dimension finie. Dimension infinie.

Dans la suite, on considère des espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 5 (Gri p15). *Il existe une base telle que $L \subset B \subset G$ où L libre et G génératrice.*

Corollaire 6 (Gri p16). *Tout K-ev admet une base.*
De toute famille génératrice, on peut extraire une base.
Théorème de la base incomplète.

Proposition 7. *Une famille est une base ssi c'est une famille libre et maximale ssi génératrice minimale*

Application 8 (Gri p.49-50). Détermination d'une base par l'algorithme de Gauss

Proposition 9 (Gri p13). *Soit $\{v_1, ..v_n\}$ une base de E, bijection avec K^n.*

1.3 Dimension d'un espace-vectoriel

Lemme 10 (Gri p17). *Dans un ev engendré par n éléments, toute famille contenant plus de n éléments est liée.*

Application 11 (OA). Soit A une k-algèbre de dimension finie n et $a \in A$. Alors il existe un polynôme annulateur de a.

Théorème 12 (Gri p17). *Toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Dimension.*

Exemple 13 (Gri p18). Dimension de K^n, $K_n[X]$, $M_{n,m}$.

Exemple 14 (Nourdin p). Suites définies par récurrence d'ordre 2 est de dim 2.

Application 15 (Gri p18). Dimension d'un produit d'ev.

Corollaire 16 (Gri p18). *Dans un ev de dim n, les familles ayant moins de n éléments ne peuvent pas être génératrices.*

Théorème 17 (Gri p19). *Toute famille génératrice/libre ayant n éléments est une base.*

Exemple 18.

1.4 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 19 (Gri p19). *Soit F un sev de E. Alors $dim(F) \leq dim(E)$ et $dim(F) = dim(E)$ ssi $F = E$.*

Application 20 (OA p151 ou JDM). Une forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

Proposition 21 (Gri p27). *$E = E_1 \oplus ... \oplus E_p$ ssi $E = E_1 + ... + E_p$ et $dim(E) = dim(E_1) + ... + dim(E_p)$.*

Application 22 (Gri p164). f est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à la dimension de E.

Proposition 23 (Gri p22)**.** *Existence du supplémentaire. Non unicité mais même dimension.*

Remarque (oral) : C'est ce théorème qui est la base d'énormément de raisonnements par récurrence.

Proposition 24 (Gri p24)**.** *Formule de Grassman.*

Corollaire 25 (Gri p23)**.** $E = E_1 \oplus E_2$ *ssi* $dim(E) = dim(E_1) + dim(E_2)$ *et* $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Remarque (oral) [Gourdon p110] Faux si plus de 2 sev.

Application 26 (Gourdon p114)**.** Si E est un K-ev et F est un sev de E alors $codim(F) := dim(E/F) = dim(E) - dim(F)$.

Exemple 27. S_n et A_n sont supplémentaires dans M_n.

1.5 Dimension d'espaces vectoriels et applications linéaires

Proposition 28 (Gri p61)**.** *L'image d'une famille libre/génératrice/base par une application injective/surjective/bijective est libre.*

Corollaire 29 (Gri p61)**.** *Deux ev de dim finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.*

Application 30 (OA p152)**.** L'ensemble des solutions de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ est un espace vectoriel de dimension n.

Proposition 31 (Gri p66)**.** *Isomorphisme entre* $L(E, F)$ *et* $M_{n,m}$ *et dimension de* $L(E, F)$.

1.6 Dimension et dualité

à prendre dans JDM

Proposition 32 (Gou p127)**.** $dim(E) = dim(E^*)$ *+ bases duales*

Définition 33 (Gou p128)**.** Définitions orthogonaux.

Proposition 34 (Gou p128)**.** *Dimension et lien entre les orthogonaux.*

Application 35 (Gou ou H2G2)**.** Invariants de similitude

Proposition 36 (Gou p127)**.** E *est isomorphe à* E^{**}.

2 Rang d'une application linéaire

2.1 Définitions et théorème du rang

Définition 37 (Gri p59)**.** Rang d'une application linéaire.

Définition 38 (Grip80)**.** Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice.

Proposition 39. $rg(f) = rg(A)$ *pour* A *la matrice de* f *dans une base* B.

Proposition 40 (Gri ex8p90)**.** *Si* f *est surjective alors* $rg(g \circ f) = rg(g)$. *Idem injective.*

En composant à gauche ou à droite par une application bijective, le rang ne change pas.

Théorème 41 (Gri p62)**.** *Théorème du rang. Tout supplémentaire de* $Ker(f)$ *est isomorphe à l'image de* f.

Application 42 (Gri p63)**.** Injective ssi surjective ssi bijective

Contre-exemple 43 (Gri p63)**.** Dérivée d'un polynôme

Application 44. $rg(M) = n$ ssi M est inversible.

Application 45 (OA p.154)**.** Polynômes interpolateurs de Lagrange

Application 46 (Gri p90)**.** Projecteurs

2.2 Calcul effectif de rang

Proposition 47. *(point de vue matriciel de la prop sur le rang de la composée) Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, ainsi que les permutations de lignes/colonnes ne changent pas le rang de M. On peut ainsi utiliser le Pivot de Gauss pour réduire M par équivalence à une matrice échelonnée, dont le rang est égal au nombres d'échelons non-nuls.*

Exemple 48.

Proposition 49 (Gou p122)**.** A *est de rang* r *si et seulement si* A *est équivalente à* J_r.

Application 50 (Gou p122)**.** Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.
$rg(A) = rg({}^tA)$

Remarque (oral) :[Gou p122] Rang des colonnes = rang des lignes

Théorème 51 (Gou p122)**.** *Rang de A et matrices extraites.*

Exemple 52.

Application 53. Theorème des extrema liés

Application 54. Le rang est une notion qui est invariante par extension de corps.

3 Extensions de corps et dimension

Définition 55 (Calais p.3)**.** Extension de corps

Définition 56 (Calais p.6)**.** Degré

Remarque 57 (Calais p.6)*.* $[L : K] = 1$ ssi $L = K$

Exemple 58. $\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$

Théorème 59 (Calais p.6)**.** *Base téléscopique*

Rajouter élément algébrique, polynôme minimal et dimension de $\mathbb{K}[a]$.