

# Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et géométrie

!!!Mettre les énoncés en dimension finie si les applications ne sont qu'en dimension finie!!!

## Développements :

Surjectivité de l'exponentielle  
Théorème des extrema liés

## Bibliographie :

Lafontaine, Rouvière, OA, (Gourdon)

## Plan

**Définition 1** (Rouv p .54 ou Laf p.21). Difféomorphisme

*Remarque 2* (Laf p.21). Dans ce cas la différentielle est une bijection. On va voir que la réciproque n'est pas vraie, (vraie seulement localement)

## 1 Théorème d'inversion locale

### 1.1 Enoncé

**Théorème 3** (Rouv p.188). *TIL +dessin*

**Contre-exemple 4** (Rouv ex 63). La ccl est uniquement locale

**Contre-exemple 5** (Rouv ex 63). L'hypothèse  $C^1$  est nécessaire

**Théorème 6** (Rouv p. 190). *Thm d'inversion globale*

*Remarque 7*. Plus difficile à utiliser que le théorème d'inversion locale car il faut vérifier l'injectivité

**Théorème 8** (Rouv p.191). *Hadamard-Lévy? ?(thm difficile)*

## 1.2 Applications

### 1.2.1 Montrer qu'un ensemble est ouvert

**Proposition 9**. *Exp est un diffeo local au voisinage de 0*

**Théorème 10**. *Surjectivité de l'exponentielle*

### 1.2.2 Immersion, submersion

**Définition 11** (Laf p.26). Immersion

**Théorème 12** (Laf p. 25 et Rouv ex 73). *Immersion à diffeo près +dessin*

*Remarque 13* (Laf p.25). Existence d'un inverse à gauche

**Définition 14** (Laf p.26). Submersion

**Théorème 15** (Laf p. 26 et Rouv ex 72). *Submersion à diffeo près +dessin*

*Remarque 16* (Laf p.26). Existence d'un inverse à droite

**Application 17** (Rouv ex 72). [A travailler!] Equation aux dérivées partielles

**Théorème 18** (Laf ex 10 ou Rouv ex 74). *Thm du rang est*

### 1.2.3 Réduction des formes quadratiques

**Proposition 19** (Rouv ex 66). *Réduction des formes quadratiques*

**Théorème 20** (Rouv ex 114). *Lemme de Morse*

## 2 Théorème des fonctions implicites

### 2.1 Enoncé

**Théorème 21** (Rouv p.192). *TFI +dessin*

**Exemple 22** (Rouv p.193). cercle

**Proposition 23** (Rouv p.194). *Différentielle de la fonction implicite*

**Exemple 24** (Rouv p.194). cercle (suite)

**Exemple 25** (OA p.11). Racine  $k$ -ème d'une matrice

## 2.2 Applications

### 2.2.1 Equation paramétrique et tangente

**Application 26** (Rouv ex 76). Folium de Descartes

### 2.2.2 Polynômes et équations

**Application 27** (OA p.11). Régularité d'une racine simple d'un polynôme

**Application 28** (Rouv ex 78). [Peut être un peu long...] Polynômes et discriminant

**Application 29** (Rouv ex 79). Asymptotique des racines d'un polynômes

**Application 30** (Rouv ex 81). Montrer que des solutions obtenues par thm de points fixes sont  $C^\infty$

### 2.2.3 Extrema liés

**Théorème 31** (OA p.20). *Théorème des extrema liés*

**Application 32** (Gour ex 4 p.319). Inégalité arithmético-géométrique

**Application 33** (OA p.21). Diagonalisation des endomorphismes symétriques

**Application 34** (OA p.35).  $SO_n(\mathbb{R})$

## 3 Sous variétés

### 3.1 Définitions équivalentes

**Définition 35** (Laf p.27). Sous variété avec un difféo +dessin

**Théorème 36** (Laf p.28). *Définitions équivalentes d'une sous variété*

**Exemple 37** (Laf p.30 et Rouv ex 94+p.199). [avec submersion] Sphère,  $SL_n$ , groupe orthogonal

**Exemple 38** (Cours K.Beauchard). les 4 définition sappliquées à la parabole  $y = x^2$ , ou la sphère

**Contre-exemple 39** (Laf p.31 et Rouv ex 88). Le cône de révolution n'est pas une sous-variété.  
Autres c-ex Ex 88 Rouv

### 3.2 Espaces tangents

**Définition 40** (Laf p.32). Vecteur tangent

**Proposition 41** (Laf p.33). *L'ens des vecteurs tangents forment un ev*

**Définition 42** (Laf p.33). Espace tangent

**Théorème 43** (Laf p.33 ou Rouv p.201). *Définitions équivalentes de l'espace tangent*

*Remarque 44*. Autre démo du thm des extrema liés

**Exemple 45** (Rouv ex 94). Espace tangent de  $SL_n$  et  $O_n$

**Exemple 46** (Laf p.34). Equation du plan tangent pour une surface de  $\mathbb{R}^3$