

Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Développements :

Méthode de Newton, Méthodes itératives et rayon spectral

Bibliographie :

Gourdon analyse, Rouvière, Amrani, Rombaldi, Allaire, Demailly

Plan

Soit E un evn, soit I une partie de E stable par $f : I \rightarrow E$. Soit $U_0 \in I$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

1 Dépendance vis à vis de f

1.1 Continuité

Proposition 1 (Amr p. 38). *Continuité séquentielle*

Corollaire 2 (Amr p. 38). *Continuité et point fixe*

Exemple 3 (Amr p. 38).

Exemple 4 (Amr 1.21 p. 67). réel qui va suivre tout le long

Exemple 5. vectoriel qui va suivre tout le long : suite de polygones

1.2 Cas des fonctions monotones

Proposition 6 (Gou p. 193 ou Amr p. 38). *Monotonie de la suite en fonction de la monotonie de la fonction*

Exemple 7 (Amr p. 39 et 1.27 p. 76).

Exemple 8 (Amr 1.21 p. 67). Qui va suivre tout le long

1.3 Suites arithmétique et géométrique

Cf 223 dans Amrani p. 3

1.4 Fonctions contractantes

Théorème 9 (Rouv p.135 ou Dem p.94). *Thm de point fixe*

Exemple 10.

Contre-exemple 11 (Rouv p. 135).

Corollaire 12 (Gou p. 23 ou Dem p.94). *Cas où f^r est contractante*

1.5 Suites récurrentes d'ordre n

Définition 13 (Gou p. 192). Suite récurrente d'ordre n

Proposition 14 (Gou p. 192). *Continuité et point fixe*

1.5.1 Cas des coefficients csts

Proposition 15. *Se ramener à l'écriture matricielle*

Théorème 16 (Gou p. 194 et Amr p.9). *Forme des solutions en dim n et 2*

Exemple 17 (Amr p. 47). Fibonacci

2 Cas des suites vectorielles

2.1 Récurrence linéaire à coefficients constants

Ici $U_{n+1} = AU_n$

Proposition 18. *Si A diagonalisable alors on sait calculer A^n*

Exemple 19. Suite de polygones

Si on ne sais pas diagonaliser :

Définition 20 (All p.411). Rayon spectral

Proposition 21 (All p.411). *Rayon spectral pour les matrices normales*

Proposition 22 (All p.412). *Lien entre rayon spectral et norme (inf des normes subordonnées)*

Théorème 23 (All p.412). *Cv et rayon spectral*

2.2 Méthodes itératives

Allaire p. 428 cf 233 On veut résoudre $Ax = b$.

3 Algorithmes

3.1 Vitesse d'algorithme

Pour étudier la vitesse d'un algorithme on compare l'erreur $|u_n - l|$ avec une suite de référence. [Amr p. 40]

Définition 24 (Amr p. 40). Vitesse géométrique

Théorème 25 (Amr p. 40). *D'Alembert*

Contre-exemple 26 (Amr p. 41). Suite qui cv géométriquement sans vérifier le thm

Remarque 27. C'est ce qu'on verra avec Newton

Remarque 28 (Amr p. 42). Cv lente

Remarque 29 (Amr p. 42). Cv géométrique n'est pas lente

Définition 30 (Amr p. 42). cv rapide

Théorème 31 (Amr p. 43). *Critère*

Exemple 32 (Amr p. 43).

3.2 Méthode de Newton

Théorème 33 (Rouv p. 140). *Newton*

Exemple 34 (Rouv p. 140).

Théorème 35 (Dem p.110). *Newton Raphson*

Exemple 36 (Dem p.111).

3.3 Méthode de la sécante

Méthode de la dichotomie pour algorithme naïf Dem p. 95-102

3.4 Exemples de méthodes itératives

Allaire p. 430