# Leçon 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

## Développements :

Weierstrass, Intégrale de Fresnel, Ascoli

## Bibliographie :

Rombaldi Eléments d'analyse réelle (R), Hauchecorne (H), Li (L)

## Notes

Plan librement inspiré de celui présenté par Marie Derrien et Charline Le Guen.

## Plan

Soit $I$ un intervalle réel d'extrémités $a < b$.

## 1 Notions de continuité et dérivabilité

### 1.1 Fonctions continues

**Définition 1** (R p. 37)**.** continuité en un point

**Définition 2** (R p. 37)**.** continuité sur $I$

**Exemple 3** (R p. 38)**.** fct cste

**Contre-exemple 4** (H p.134)**.** fct qui n'est continue en aucun point

**Théorème 5** (R p. 38)**.** *Caractérisation séquentielle de la continuité*

**Exemple 6** (R p. 39)**.** permet de montrer qu'une fct n'est pas continue en un point

**Application 7** (R p. 39)**.** limite de suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$

**Application 8** (R p. 39)**.** Deux fonctions continues égales sur un espace dense sont égales partout.

**Proposition 9** (R p. 40)**.** *Prolongement par continuité*

**Exemple 10** (R p. 40)**.**

**Proposition 11** (R p. 41)**.** *Stabilité de la continuité par opérations*

### 1.2 Fonctions dérivables

**Définition 12** (R p. 77)**.** dérivabilité en un point

**Proposition 13** (R p. 77)**.** *dérivable ssi admet un DL d'ordre 1*

**Proposition 14** (R p. 77)**.** *dérivable implique continue*

**Contre-exemple 15** (R p. 77)**.**

**Définition 16** (R .81)**.** $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^n$,

**Proposition 17** (R p. 82-83)**.** *Stabilité de la dérivabilité par opérations et formules*

**Exemple 18** (R p. 84)**.** Calculs de dérivées usuelles

## 2 Théorèmes fondamentaux

### 2.1 Continuité et compacité :

**Proposition 19** (R p. 49)**.** *continue sur un compact implique bornée et atteint ses bornes*

**Définition 20** (H p. 144)**.** uniforme continuité

**Proposition 21** (R p. 51 ou H p. 144 )**.** *Heine*

**Application 22.** Weierstrass

### 2.2 TVI

**Proposition 23** (R p. 56)**.** *L'image d'un intervalle par une fct continue est un intervalle*

**Contre-exemple 24** (R p. 56)**.**

**Théorème 25** (R p. 56)**.** *TVI*

**Application 26** (R p. 51)**.** Formule de la moyenne

**Contre-exemple 27** (H p. 138)**.** fonction discontinue vérifiant le TVI

**Théorème 28** (R p. 88)**.** *Darboux*

### 2.3 Théorème de Rolle et csqces

**Proposition 29** (R p. 95). *extremum implique pt critique*

**Contre-exemple 30** (H p.176). réciproque fausse

**Théorème 31** (R p. 137). *Rolle*

**Contre-exemple 32** (R p. 138). toutes les hypothèses sont nécessaires

**Application 33** (R p. 141). La dérivée d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ est scindée

**Théorème 34** (R p. 151). *Thm des accroissements finis*

**Application 35** (R p. 154). Sens de variation et signe de la dérivée

**Contre-exemple 36** (R p. 154). si on n'a pas un intervalle

**Application 37** (R p. 157). prolongement de la dérivée

**Exemple 38** (R p. 157).

### 2.4 Formules de Taylor

**Théorème 39** (R p.181). *Taylor Lagrange*

**Application 40** (R p. 189). Inégalités

**Théorème 41** (R p. 186). *Taylor Young*

**Exemple 42.** DL

**Théorème 43** (R p.182). *Taylore reste intégral*

### 2.5 Continuité et dérivabilité sous le signe intégral

[Garet] Avec l'intégrale de Fresnel

## 3 Etude de certaines classes de fonctions

### 3.1 Continuité des fonctions monotones

**Proposition 44** (R p. 44). *ens des pts de discontinuité est au plus dénombrable*

**Proposition 45** (R p. 58). *Une fonction monotone de $I$ dans $\mathbb{R}$ tq $f(I)$ est un intervalle est continue sur $I$.*

**Théorème 46** (R p. 60). *thm de la bijection monotone*

**Application 47** (R p. 60). Définition des fonctions trigonométriques inverses

### 3.2 Fonctions lipschitziennes

**Définition 48** (H p.144). fct lipschitzienne

**Proposition 49** (H p.144). *lipsch implique uniformément continue*

**Proposition 50** (R p. 48). *Une fct de dérivée bornée est lipsch*

### 3.3 Fonctions convexes

**Proposition 51** (R p. 242). *convexe sur $I$ implique continue sur l'intérieur de $I$*

**Contre-exemple 52** (R p. 243). pas vrai sur tout $I$

**Proposition 53** (R p. 244). *caractérisation par la croissance de la dérivée*

**Corollaire 54** (R p. 246). *Caractérisation avec la dérivée seconde*

**Exemple 55** (R p. 246).

### 3.4 Suites de fonctions

**Théorème 56** (H p.236). *Transmission de la continuité par cv uniforme*

**Contre-exemple 57** (H p. 231).

**Théorème 58** (H p. 240). *cas pour la dérivabilité*

**Contre-exemple 59** (H p.240). si on n'a pas toutes les hypothèses

### 3.5 Espace des fonctions continues sur un compact [L]

**Définition 60.** equicontinuité

**Théorème 61.** *Ascoli*

**Application 62.** Opérateur à noyau