Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Développements :

Ellipsoïde de John-Loewner, Processus de Galton-Watson, Algorithme du gradient à pas optimal

Bibliographie :

Rombaldi, Li, FGN, Tauvel Géométrie, OA, Gourdon analyse, Garet

Plan

1 En analyse réelle

1.1 Ensembles convexes

[Tauvel]

Proposition 1 (Tau p.70). *Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les connexes, ce sont les intervalles.*

Application 2. Les notions de convexité et connexité coïncident. On a par ex le TVI

Contre-exemple 3 (Hauchecorne p.328). Pas vrai en dimension supérieure : cercle dans $\mathbb{R}^2$

Définition 4 (Tau p.71). Enveloppe convexe

Théorème 5 (Tauvel p.71). *Gauss-Lucas*

Application 6 (FGN Alg 1 5.43c). Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, Δ une droite du plan complexe, H_1 et H_2 les deux demi-plans ouverts limités par Δ.On suppose que P' a une racine dans H_1 alors $P(H_1) = \mathbb{C}$.

Théorème 7 (Tauvel p.71). *Carathéodory*

A l'oral 8. Résultat utile pour passer à la limite dans des combinaisons convexes

Application 9 (Tau p.72). L'enveloppe convexe d'une partie compacte/bornée l'est

A l'oral 10. C'est un résultat important : chercher pourquoi...

Contre-exemple 11 (???). Faux en dimension infinie : H un espace de Hilbert, muni de sa base hilbertienne (e_n), alors $K = \dfrac{e_n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \cup 0$ est compact mais son enveloppe convexe n'est même pas fermée

1.2 Caractérisation des fonctions convexes

Proposition 12 (Rom 9.1 p.233). *Caractérisation de la convexité avec la convexité de l'épigraphe*

Faire un dessin

Théorème 13 (Rom p.238). *Equivalence de la convexité et inégalité des pentes+croissance des pentes*

Application 14 (OA p.28). Une fonction convexe est localement lipschitzienne

Application 15 (Gou p.98). Existence de limites

Théorème 16 (Rom thm915 p.244). *Si f est dérivable alors on a equivalence entre : f convexe, f', croissante, f située au dessus de ses tangentes +dimension supérieure*

Application 17. Une fonction convexe est au dessus de ses tangentes -> tracé de graphe

Théorème 18 (Rom - thm9.18 - p.246). *Si f deux fois dérivable sur I. f convexe (resp concave) ssi $f'' \geq 0$ (resp. $f'' < 0$). +dimension supérieure*

Exemple 19 (Rom p.246). exp est convexe sur $\mathbb{R}$. log est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$, fonction quadratique

Application 20 (Gou p.295). Convexité et Log-convexité de la fonction Gamma + allure du graphe

Application 21 (Rouv ex 42 p.127). Calcul du minimum d'un ensemble

A l'oral 22. Unicité de la fonction gamma log convexe etc

Théorème 23 (Rom - thm9.17 - p.245). *Si f est derivable alors on a EQU : f strict convexe sur I - f' strict croissante - f située strict au-dessus de ses tangentes.*

Application 24 (Cottrel). Processus de Galton-Watson

Théorème 25 (Rom p.246). *f est strictement convexe ssi $f'' > 0$ et zéros de f sont isolés.*

Exemple 26 (Rom p.246). $x \mapsto x^p$ stt convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour $p > 1$.

Application 27 (ex 4 p.15 Rouv). norme p est une norme pour $p \geq 1$

2 En optimisation

Proposition 28 (Rouv p.371 ex 11ç ou Rom p.241). *Point critique ssi minimum global*

Application 29. Recherche d'extremum facile pour une fonction convexe : exemple gradient à pas optimal

Remarque 30 (Hiriart p 274). Quand la fonction n'est pas différentiable mais seulement continue, on peut utiliser la sous-différentielle et on obtient une caractérisation pour être un minimum. Donner l'ex de la valeur absolue TROP DANGEREUX ! !

Proposition 31 (OA p.30 ou Rom p.242). *Pour une fonction convexe, un minimum local est global*

A l'oral 32. Vrai sans hypothèse de différentiabilité/dérivabilité

Application 33.

Proposition 34 (OA p.30). *Stricte convexe implique unicité du minimum*

Remarque 35. Pas forcément existence : exp

Application 36. gradient à pas optimal

3 Pour obtenir des inégalités de convexité

3.1 Inégalités pour les fonctions usuelles

Proposition 37 (Rom - thm9.21 p.249). *Inégalité de Jensen*

Application 38. Inégalité arithmético-géométrique

Proposition 39 (Rom p.247). $e^x \geq x+1$

Application 40. lemme du TCL

Proposition 41 (Rom p.247). $ln(x) \leq x-1$

Application 42 (Gou p.295). Convergence de $\int_0^n (1-t/n)^n t^{x-1} \mathrm{d}t$ vers la fonction Gamma (TCVD)

Proposition 43 (FGN). *Stricte concavité logarithmique du déterminant*

Application 44 (FGN). Ellipsoïde de John-Loewner

3.2 Inégalités en théorie de l'intégration

Proposition 45 (Garet p.187). *Inégalité de Young*

Corollaire 46 (Garet p.187). *Inégalité de Hölder*

Application 47 (Garet p.190). Inclusion des L^p

Corollaire 48 (Garet p.189). *Inégalité de Minkowski*

Application 49. La norme p est une norme (inégalité triangulaire)

3.3 Inégalités en probabilités

Proposition 50 (Garet p.152). *Inégalité de Jensen en proba*

Application 51. Avec la valeur absolue, le carré, la fonction inverse. Rien d'exceptionnel...

Application 52. Montrer que l'estimateur $1/X_n$ pour une loi exponentielle, est biaisé

4 Projection sur un convexe fermé

Théorème 53 (Li p. 32-35). *Thm de projection sur un convexe fermé*

Application 54. Polynômes de meilleure approximation quadratique

Application 55. Moindres carrés

Corollaire 56 (Li p.36). *thm du supplémentaire orthogonal*

Application 57. (csqce)[Li p. 39] Thm de représentation de Riesz

Corollaire 58 (Li p.37). *Critère de densité*

Application 59. Le polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne