

Leçon 262 : Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Développements :

Théorème Central Limite. Dini-Cantelli

Bibliographie :

Garet et Kurtzman, De l'intégration aux probabilités. Barbe Ledoux

Plan

Graphe des liens entre les modes de cv : Cottrell p.148 On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$.

Théorème 1 (Lemme de Borel-Cantelli 1). [G p.244]

Théorème 2 (Lemme de Borel-Cantelli 2). [G p.245]

1 Convergence presque-sûre et convergence en probabilité

1.1 Convergence presque-sûre

Définition 3 (G p.237). Convergence presque-sûre +notation

Remarque 4 (G p.237). C'est la convergence presque partout pour une mesure de proba

Proposition 5 (Sans réf). *Unicité p.s. de la limite*

Proposition 6 (Opérations). [G p.237] *Cv p.s. est stable par composition par une fonction continue, (multiplication par un scalaire, somme, produit etc) produit scalaire,. Cv p.s d'un vecteur équivaut à cv p.s de ses composantes.*

Proposition 7 (Critère de convergence p.s.). [G p.239 ou BL p.110] X_n cv p.s. vers X ssi $\forall \epsilon > 0 \mathbb{P}(\limsup\{|X_n - X| \geq \epsilon\}) = 0$

Exemple 8 (B.L. p. 111 ex (i)).

Proposition 9 (Critère de convergence p.s.). [B.L. p. 110] X_n cv p.s. vers X ssi $\forall \epsilon > 0 \lim \mathbb{P}(\sup\{|X_n - X| \geq \epsilon\}) = 0$

Proposition 10 (Lien avec Borel Cantelli). [B.L. p.111] *Si $\forall \epsilon > 0 \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) < \infty$ alors cv p.s. Si les X_n sont indépendantes. X_n cv p.s. vers 0 ssi $\forall \epsilon > 0 \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) < \infty$*

Exemple 11 (B.L. p. 111 ex (ii) et Garet ex 76).

1.2 Convergence en probabilités

1.2.1 Définitions, stabilité et critères

Définition 12 (G p.240). Convergence en proba + notation

Proposition 13 (Opérations). [G p.240-247 et B.L. p. 116] *Cv p.s. est stable par composition par fonction continue (somme, multiplication par un scalaire etc) couple, produit scalaire . équivaut à la cv des composantes.*

Proposition 14 (Critère de Cauchy de la convergence en proba). [B.L. p.116] *Si $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \mathbb{P}(|X_n - X_{n_0}| \geq \epsilon) \leq \epsilon$ alors X_n converge en proba.*

Proposition 15 (Sans réf). X_n cv en proba vers X si $\forall \epsilon > 0 \limsup \mathbb{P}(|X_{n+k} - X_n| > \epsilon) = 0$.

1.2.2 Liens entre les convergences

Proposition 16 (Lien cv en proba et cv p.s.). [G p.240-246] *Cv p.s. implique cv en proba. Récip fausse. Cv en proba implique cv p.s. d'une sous suite*

Contre-exemple 17 (G p. 249+BL p. 114). cv en proba n'implique pas cv p.s.

Proposition 18 (Lien cv en proba et cv p.s.). [B.L. p.115] *cv en proba ssi de toute suite on peut extraire une sous suite qui cv p.s.*

1.3 Lois des grands nombres et applications

Théorème 19 (LGN faible). [G p.242 ou B.L. p. 132]

Théorème 20 (LGN forte). [G p.249 ou B.L. p. 132](admis)

Application 21 (G p.250). Estimation de fréquences par la LGN forte.

Application 22 (Méthode de Monte-Carlo). [?]

Application 23 (Construction d'estimateurs). [G p. 304]

Application 24 (Thm de Glivenko-Cantelli). [G p. 304]

2 Convergence en norme L^p

2.1 Définitions et critères

Définition 25 (B.L p. 117). Convergence dans L^p

Proposition 26 (Critère de Cauchy pour la convergence L^p). [Sans réf]

Proposition 27 (G p.190). $1 \leq p \leq r$ Cv L^r implique cv L^p .

2.2 Liens entre les modes de convergence

Proposition 28 (TCVD). [Sans réf] Cv p.s. + domination implique cv L^p .

Proposition 29 (Lien cv L^p et cv p.s.). [G p.237 (p. 193 pr démo)] Cv L^p implique cv p.s d'une sous-suite. Cv L^p n'implique pas cv p.s.

Contre-exemple 30 (G). Cv L^p n'implique pas c.v. ps voir ex 66

Contre-exemple 31 (B.L p. 118 ex (ii)). Cv p.s. n'implique pas cv L^p

Proposition 32 (Lien cv L^p et cv en proba). [G p.240 ou B.L p. 117] Cv L^p implique cv en proba. Récip fausse

Contre-exemple 33 (G. p 256 ex 77). Cv en proba n'implique pas cv L^1

Contre-exemple 34 (B.L p. 117 ex (i)). Cv en proba n'implique par cv L^p

Définition 35 (B.L p. 118). uniformément intégrable

Exemple 36 (B.L p. 118). famille finie, famille majorée par une v.a. est u.i.

Proposition 37 (B.L p. 118). X_n u.i. ssi $\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall A \mathbb{P}(A) \leq \eta \Rightarrow \sup \mathbb{E}[|X_i| 1_A] \leq \epsilon$ et $\sup \mathbb{E}[|X_i|] < \infty$.

Proposition 38 (Lien cv en proba et cv L^1 BL p.119). cv en proba + u.i. \Leftrightarrow limite intégrable et cv L^1 .

2.3 Cas des martingales

def martingale, cv L , cv L^1 , théorème d'arrêt voir Ouvrard ou autres

3 Convergence en loi

3.1 Définitions, stabilité et premiers critères

Définition 39 (G p. 265). Convergence étroite de mesures

Définition 40 (G p. 265). Convergence en loi + notation

Proposition 41 (G p. 265). Unicité de la limite

Proposition 42 (G p. 265). X_n cv en loi vers X ssi pour toute fonction f continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)]$ converge vers $\mathbb{E}[f(X)]$

Proposition 43 (Opérations). [G p. 265-266] stable par composition par une fonction continue. Cv du couple implique cv de la somme et du produit scalaire.

Contre-exemple 44 (B.L p. 123 ex (iii)). Cv en loi n'implique pas cv en loi du couple

Proposition 45 (G p. 267). Cas de v.a. discrètes : Cdition suffisante : cv des proba

Application 46 (G p. 267). Approximation d'une loi de Poisson par une loi binomiale

Remarque 47 (G p. 268). Signification : la loi de Poisson est une bonne modélisation pour le nombre de fois où un événement rare survient (par ex un tremblement de terre)

Proposition 48 (Critères). [G p. 269-273] X_n cv en loi vers x ssi pour tout fermé F , $\mathbb{P}(F) \leq \limsup \mathbb{P}_n(F)$ etc ssi cv des fonctions de répartitions ssi convergence des espérances pour les fonctions continues positives à support compact.

3.2 Un critère très utile

Théorème 49 (Thm de Lévy). [G p. 276]

Théorème 50 (Thm de continuité de Lévy). [G p. 276]

Application 51 (TCL). [G p. 277 ou B.L. p. 136][Autre réf pour dvlpt]

Application 52 (Construction d'intervalles de confiance asymptotique). [B.L. p. 138]

Application 53 (Theorème central poissonien). [B.L. p. 140]

3.3 Liens avec les autres modes de convergence

Proposition 54 (Lien cv en proba et en loi). [G p. 274 ou B.L ex (iv) p.123] Cv en proba implique cv en loi. Récip fausse. Cv en loi vers une cste implique cv en proba.

Contre-exemple 55 (B.L p. 123 ex (iii)). Cv en loi n'implique pas cv en proba

Théorème 56 (lemme de Slutsky). [G p. 275]

Proposition 57 (Lien cv p.s. et en loi). [B.L p. 122] Cv p.s. implique cv en loi. recip fausse

Contre-exemple 58 (B.L p. 123 ex (iii)). Cv en loi n'implique pas cv p.s.