Théorème de Banach-Alaoglu et optimisation.

Théorème 0.1

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé séparable. Soit $(T_n)_{n\leq 1}$ une suite bornée de formes linéaires continues. Alors il existe une sous-suite $(T_{n_k})_k$ et une forme linéaire continue $T \in \mathcal{L}_c(E)$ telles que :

$$\forall x \in E, \quad T_{n_k}(x) \to T(x) \text{ dans } \mathbb{K}.$$

Démonstration.
Soit $(x_p)_{p\geq 1}$ une suite dense dans E (E étant séparable).
Montrons que pour tout $p \geq 1$, la suite $(T_n(x_p))_{n\geq 1}$ est bornée. Soit $p \geq 1$. On a :

$$\forall n \geq 1, \quad |T_n(x_p)| \leq ||T_n||\ ||x_p|| \leq M||x_p||.$$

On applique le procédé diagonal, il existe une suite $(n_k)_k$ telle que pour tout $p \geq 1$, la suite $(T_{n_k}(x_p))_k$ converge vers un élément de $\mathbb{K}$ noté $T(x_p)$.

Soit $x \in E$. Montrons que $(T_{n_k}(x))_k$ converge dans $\mathbb{K}$.
Soient $\varepsilon > 0$ et $p \geq 1$ tels que $||x - x_p|| < \varepsilon$. Soit $k_0 \geq 1$ tel que

$$\forall k, k' \geq k_0 \quad |T_{n_k}(x_p) - T_{n_{k'}}(x_p)| \leq \epsilon.$$

Alors pour tout $k, k' \geq k_0$,

$$\begin{aligned}|T_{n_k}(x) - T_{n_{k'}}(x)| &\leq |T_{n_k}(x) - T_{n_k}(x_p)| + |T_{n_k}(x_p) - T_{n_{k'}}(x_p)| + |T_{n_{k'}}(x_p) - T_{n_{k'}}(x)| \\ &\leq M||x - x_p|| + \varepsilon + M||x - x_p|| \\ &\leq (2M + 1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $(T_{n_k}(x))_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ donc converge vers une limite notée $T(x)$.
On vérifie alors que $x \mapsto T(x)$ est linéaire et continue (on utilise pour cela la continuité de la somme, du produit et la norme). □

Théorème 0.2

Soit H un espace de Hilbert séparable et $J : H \to \mathbb{R}$ continue, convexe et coercive (ie que $\lim\limits_{||x||\to+\infty} J(x) = +\infty$). Alors $\inf_H J > -\infty$ et il existe $\alpha \in H$ tel que $J(\alpha) = \inf\limits_H J$.

Démonstration.
Soit $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante : $\lim\limits_{n\to+\infty} J(x_n) = \inf_H J$.

➤ Montrons que $(x_n)_n$ est bornée.
Supposons que $(x_n)_n$ ne soit pas bornée. Il existe alors une $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $x_{\varphi(n)} \to +\infty$. Comme J est coercive, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J(x_{\varphi(n)}) = +\infty$. Absurde.

➤ Montrons qu'il existe une suite $(n_k)_k$ et $x \in E$ tels que $\lim\limits_{k\to+\infty} < x_{n_k}, y >=< x, y >$ pour tout $y \in H$.
Pour tout $z \in H$, on note $\phi_z \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R})$ définie par

$$\phi_z : x \in H \mapsto < x, z > .$$

On remarque que $||\phi_z|| = ||z||$.
On considère alors la suite bornée $(\phi_{x_n})_n \in \mathcal{L}_c(H,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. D'après le théorème précédent, il existe une suite $(n_k)_k$ et $\phi \in \mathcal{L}_c(H,\mathbb{R})$ tel que pour tout $y \in H$:

$$\lim_{k\to+\infty} \phi_{x_{n_k}}(y) = \phi(y).$$

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $x \in H$ tel que $\phi = \phi_x$.

➤ Montrons que $J(x) = \inf\limits_H J$.
Soit $\beta > \inf\limits_H J$. Posons $C_\beta = \{x \in H \mid J(x) \leq \beta\}$.
On a alors que C_β est :
✎ convexe car J est une application convexe ;
✎ fermé car J est une application continue ;
✎ non vide par définition de la borne inférieure.
On définit alors l'opérateur de projection sur un convexe fermé $p : H \to C_\beta$.

Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $x_{n_k} \in C_\beta$. Donc par caractérisation de la projection :

$$< x_{n_k} - p(x), x - p(x) >\leq 0,$$

$$\underbrace{< x_{n_k}, x - p(x) >}_{\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} <x, x-p(x)>} - < p(x), x - p(x) >\leq 0.$$

Donc $||x - p(x)||^2 \leq 0$.
D'où $x = p(x)$, c'est-à-dire que $x \in C_\beta$.

Conclusion : Pour tout $\beta > \inf\limits_H J$, $J(x) \leq \beta$ ce qui montre que $\inf_H J > -\infty$ et $J(\alpha) = \inf\limits_H J$.

□