Estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre d'une loi $\mathcal{U}([0,\theta])$.

Théorème 0.1

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{U}([0,\theta])$, avec $\theta > 0$.
On note $\widehat{\theta_n}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ. Alors :

1. $\widehat{\theta_n} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$;
2. $\widehat{\theta_n}$ est biaisé car $\mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta_n}] = \dfrac{n}{n+1}\theta$;
3. $\widehat{\theta_n}$ est fortement consistant car $\widehat{\theta_n} \underset{n\to\infty}{\theta}$ $\mathbb{P}_\theta-$ps ;
4. $\widehat{\theta_n}$ est de vitesse $\dfrac{1}{n}$ car $n(\widehat{\theta_n} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_\theta - ps} -\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Démonstration.

1. Le modèle statistique $\big((\mathbb{R}^+)^n, \{\mathbb{P}_\theta^{\otimes n}\}_{\theta>0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\otimes n})\big)$ est dominé par la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+)^n$ et donc admet une vraisemblance :
$$\forall \theta > 0, \quad L_n(x_1, ..., x_n; \theta) = \begin{cases} \theta^{-n} & \text{si } 0 \leq x_1, ..., x_n \leq \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Donc l'estimateur du maximum de vraisemblance vaut $\widehat{\theta_n} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ (tracer la courbe de L_n en fonction de θ pour s'en convaincre).

2. Déterminons la loi de $\widehat{\theta_n}$. Soit $t \in \mathbb{R}^+$,
$$F_{\widehat{\theta_n}}(t) = \mathbb{P}_\theta(\widehat{\theta_n} \leq t) = \mathbb{P}_\theta(\forall i \in [|1,n|],\ X_i \leq t) = \mathbb{P}_\theta(X_1 \leq t)^n = \begin{cases} \left(\dfrac{t}{\theta}\right)^n & \text{si } t \leq \theta \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On en déduit que la densité de $\widehat{\theta_n}$ vaut :
$$f_{\widehat{\theta_n}}(t) = \frac{n}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(t).$$
On calcule alors
$$\mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta_n}] = \int_{\mathbb{R}^+} t f_{\widehat{\theta_n}}(t)dt = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^n dt = \frac{n}{\theta^n}\int t^n dt = \frac{n}{n+1}\theta.$$
Donc $\widehat{\theta_n}$ est un estimateur biaisé (on pouvait s'y attendre car $\widehat{\theta_n} \leq \theta \mathbb{P}_\theta-$ps) mais est asymptotiquement sans biais car $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta_n}] = 0$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. On a :
$$\mathbb{P}_\theta(|\widehat{\theta_n} - \theta| \geq 0) = \mathbb{P}_\theta(\widehat{\theta_n} \geq \varepsilon + \theta \ \text{ ou } \ \widehat{\theta_n} \leq \theta - \varepsilon) = \underbrace{\mathbb{P}_\theta(\widehat{\theta_n} \geq \varepsilon + \theta)}_{=0} + \mathbb{P}_\theta(\widehat{\theta_n} \leq \theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n.$$

Pour ε suffisament petit, $|\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}|<1$ donc $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}_\theta\left(|\widehat{\theta_n}-\theta|\geq\varepsilon\right)$ converge.

Alors $\widehat{\theta_n}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_\theta-\text{ps}}\theta$.[1]

4. Soit $t\in\mathbb{R}^+$ et $n>\frac{t}{\theta}$:

$$\mathbb{P}_\theta(n(\theta-\widehat{\theta_n})\geq t)=\mathbb{P}_\theta\left(\theta-\frac{t}{n}\geq\widehat{\theta_n}\right)=F_{\widehat{\theta_n}}\left(\theta-\frac{t}{n}\right)=\left(\frac{\theta-\frac{t}{n}}{\theta}\right)^n=\left(1-\frac{t}{n\theta}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-t/\theta}.$$

Donc $\mathbb{P}_\theta(n(\theta-\widehat{\theta_n})\leq t)\underset{n\to\infty}{1}-e^{-t/\theta}$, d'où $n(\theta-\widehat{\theta_n})\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_\theta-\mathcal{L}}\mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ et donc $n(\widehat{\theta_n}-\theta)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_\theta-\mathcal{L}}-\mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$.

□

Soit $\alpha\in]0,1[$.
Nous allons chercher un intervalle de confiance asymptôtique pour θ au niveau $1-\alpha$.
Un calcul de fonction de répartition montre que, pour tout $\lambda>0$, $\lambda\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(1)$ ont les mêmes lois.
Comme $\widehat{\theta_n}$ est consistant, on a, d'après le lemme de Slutsky :

$$\frac{n(\theta-\widehat{\theta_n})}{\widehat{\theta_n}}\xrightarrow{\mathbb{P}_\theta-\mathcal{L}}\mathcal{E}(1).$$

Soient q_1 et q_2 les quantiles respectifs d'ordre $\alpha/2$ et $(1-\alpha/2)$ de la loi $\mathcal{E}(1)$, on en déduit un intervalle de confiance asymptôtique pour θ au niveau $(1-\alpha)$:

$$\left[\widehat{\theta_n}+q_1\frac{\widehat{\theta_n}}{n};\widehat{\theta_n}+q_2\frac{\widehat{\theta_n}}{n}\right].$$

1. En effet, si on note A_n l'évènement $\{|\widehat{\theta_n}-\theta|\geq\varepsilon\}$, on a d'après le lemme de Borel-Cantelli : $\mathbb{P}_\theta(\liminf_{n\to\infty}A_n^c)=1$.
En d'autres termes : $\forall\varepsilon>0,\mathbb{P}_\theta-ps,\ \exists n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\geq n,\ |\widehat{\theta_k}-\theta|<\varepsilon$.
En particulier : $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \exists N_p\ \mathbb{P}_\theta-$négligeable, $\forall\omega\in N_p^c,\ \exists n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\geq n,\ |\widehat{\theta_k}-\theta|<1/p$.
On pose alors $N=\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}N_p$; N est un évènement $\mathbb{P}_\theta$-négligeable et :

$$\forall\omega\in N^c,\ \forall p\in\mathbb{N}^*,\ \exists n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\geq n,\ |\widehat{\theta_k}(\omega)-\theta|<\frac{1}{p}.$$