Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $||\cdot||_2$ définie par

$$||A||_2 = \sup_{X\in\mathbb{R}^n, ||X||=1} ||AX||$$

où $||\cdot||$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 0.1

En notant $\bar{\mathcal{B}}$ la boule unité fermée de $(M_n(\mathbb{R}), ||\cdot||_2$, on a $Conv(O_n(\mathbb{R})) = \bar{\mathcal{B}}$.

Démonstration. $\subset$ On remarque que $\bar{\mathcal{B}}$ est convexe et que $\Omega \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow ||\Omega||_2 = 1$.

$\supset$ Soit $M \in \bar{\mathcal{B}}$. Supposons que $M \notin Conv(O_n(\mathbb{R}))$.
Comme $O_n(\mathbb{R}))$ est compacte, le théorème de Carathéodory nous assure que $Conv(O_n(\mathbb{R}))$ est compacte.
On considère la norme $||\cdot||$ sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par le produit scalaire $(A, B) \mapsto Tr(^tAB)$.

D'après le théorème de projection sur un convexe fermé, il existe $N \in M_n(\mathbb{R})$, le projeté unique de M sur $Conv(O_n(\mathbb{R}))$ pour la norme $||\cdot||$. Posons $A =^t (M-N) \in M_n(\mathbb{R})$.
On considère une décomposition polaire de A :

$$A = \Omega S \quad \text{avec } \Omega \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } S \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

On sait que

$$\forall V \in Conv(O_n(\mathbb{R}), \quad < M-N, V-N > \leq 0.$$

Or $< M-N, V-N >= tr(^t(M-N)(V-N)) = tr(AV) - tr(AN)$.
Donc $tr(AV) \leq tr(AN)$.

De plus, $tr(AM) - tr(AN) = tr(A(M-N)) = ||M-N||^2 > 0$ car $M \notin Conv(O_n(\mathbb{R})$. Donc $tr(AV) < tr(AM) \ \ \forall V \in Conv(O_n(\mathbb{R}))$.
En particulier, pour $\Omega^{-1} \in O_n(\mathbb{R}) \subset Conv(O_n(\mathbb{R})$,

$$tr(S) < Tr(\Omega SM).$$

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une b.o.n de vecteurs propres associées aux valeurs propres $\lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ de S.

$$\begin{aligned}
Tr(\Omega SM) &= \sum_{i=1}^n < M\Omega S e_i, e_i >= \sum_{i=1}^n \lambda_i < M\Omega e_i, e_i > \\
&\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i ||M\Omega e_i||_2 ||e_i||_2 \quad \text{d'après Cauchy Schwarz,} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_{i=1}^n \lambda_i ||M\Omega e_i||_2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{car } M \in \bar{\mathcal{B}} \\
&= tr(S) \quad \text{Absurde.}
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 0.2

On a $O_n(\mathbb{R}) = Extr(\bar{\mathcal{B}})$.

Démonstration. Par définition, M est extremal de $\bar{\mathcal{B}}$ ssi

$$\forall M_1, M_2 \in \bar{\mathcal{B}}, M = \frac{M_1 + M_2}{2} \Rightarrow M = M_1 = M_2.$$

➤ Les points extrémaux de $\bar{\mathcal{B}}$ sont de norme 1.

0 n'est pas extremal car $0 = \dfrac{Id + (-Id)}{2}$.

Soit $A \in \mathcal{B}$ (ie $||A||_2 < 1$). Alors :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A}{||A||_2} + \frac{(2||A||_2 - 1)A}{||A||_2}\right).$$

Donc A n'est pas optimal.

➤ Les éléments de $O_n(\mathbb{R})$ sont extremaux.

Soit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $\Omega = \dfrac{U+V}{2}$ avec $U, V \in \bar{\mathcal{B}}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$||x||_2 = ||\Omega x||_2 = ||\frac{Ux + Vx}{2}||_2 \leq \frac{1}{2}\left(||Ux||_2 + ||Vx||_2\right) \leq ||x||_2.$$

Les inégalités sont donc des égalités. L'égalité dans l'inégalité triangulaire nous assure que $Ux = \lambda Vx$ où $\lambda > 0$. La deuxième inégalité nous donne : $||Ux||_2 = ||Vx||_2 = ||x||_2$. Donc $\Omega = U = V$ et Ω est extremal.

➤ Les éléments extremaux sont des isométries.

Soit $A = UR \in M_n(\mathbb{R})$ avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in S_n^+(\mathbb{R})$, un point extremal de $\bar{\mathcal{B}}$. On a $||A||_2 = 1$. Montrons que $R = Id$.

Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $R =^t PDP$ avec $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où les $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On peut supposer que $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$.

Comme $|||A|||_2 = |||UR|||_2 = |||R|||_2 = \lambda_n$, on a $\lambda_i \in [0,1]$ $\forall i \in [|1, n|]$.

Supposons qu'il existe $i \in [|1, n|]$ tel que $\lambda_i < 1$. On suppose que $\lambda_1 < 1$.

Alors

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2} \quad \text{avec } D_1 = diag(1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \text{ et } D_2 = diag(2\lambda_1 - 1, \lambda_2, ..., \lambda_n).$$

Ainsi

$$A = \frac{U^t PD_1P + U^t PD_2P}{2}.$$

Absurde car A est extremal.

Donc $D = Id$ donc $R = Id$.

Donc $A \in O_n(\mathbb{R})$. □