Théorème de Carathéodory et système dipohantien.

Théorème 0.1

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, d'espace vectoriel associé E et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ avec $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
Tout élément de $Conv(\mathcal{A})$ s'écrit comme une combinaison convexe de k points de $\mathcal{A}$ avec $k \leq 1 \leq 1 + dim(\mathcal{E})$.

Démonstration.
Soit $M \in Conv(\mathcal{A})$.
Par définition de l'enveloppe convexe, M est combinaison convexe d'un nombre fini de points de $\mathcal{A}$ notés $A_1, ..., A_k$.
On a donc $M = t_1 A_1 + ... + t_k A_k$ avec $0 \leq t_1, ..., t_k \leq 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$.
Supposons que $k > 1 + dim(\mathcal{E})$.
La famille $(\overrightarrow{A_1A_2}, ..., \overrightarrow{A_1A_k})$ est liée car elle possède $k-1$ vecteurs de E. Il existe donc $\lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tous nuls tel que

$$\lambda_2 \overrightarrow{A_1A_2} + ... + \lambda_k \overrightarrow{A_1A_k} = \vec{0}.$$

Posons $\mu_1 = \lambda_2 + ... + \lambda_k$ et pour $i \in \{2, ..., k\}$, $\mu_i = -\lambda_i$.
On a alors $\mu_1 \overrightarrow{OA_1} + ... + \mu_k \overrightarrow{OA_1} = \vec{0}$ où O est un point quelconque, fixé, de $\mathcal{E}$.
Comme $\mu_1 + ... + \mu_k = 0$ et que les μ_i ne sont pas tous nuls, il existe $j \in [|1, k|]$ tel que $\mu_j > 0$.
On pose alors $\lambda = \min\{t_i/\mu_i \mid \mu_i > 0\}$ puis $v_i = t_i - \lambda \mu_i$ pour tout $i \in [|1, k|]$.
On a donc

$$v_1, ..., v_k \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} v_i = \sum_{i=1}^{k} t_i - 0 = 1.$$

Aussi, il existe $q \in [|1, k|]$ tel que $\lambda = t_q/\mu_q$ d'où $v_q = 0$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{k} v_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} v_i OA_i + \vec{0} \\ &= \sum_{i=1, i \neq q}^{k} v_i OA_i. \end{aligned}$$

Donc $M \displaystyle\sum_{i=1, i\neq q}^{k} v_i A_i$ et donc M est combinaison convexe de $(k-1)$ points de $\mathcal{A}$.
En réitérant, M peut s'écrire comme une combinaison convexe d'au plus $(1 + dim(\mathcal{E})$ points. $\square$

Théorème 0.2

Soit $m, n \geq 1$ et $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$. Le système diophantien $Ax = 0$ admet une solution non-nulle dans $\mathbb{N}^n$ ssi $0_{\mathbb{R}^m}$ est dans l'enveloppe convexe des colonnes de A.

Démonstration.
$\Rightarrow$ Immédiat.

$\Leftarrow$ Soit $l \in \mathbb{N}^*$ l'indice minimal pour lequel 0 est dans l'enveloppe convexe de l colonnes $A_{i_1}, ..., A_{i_l}$ de A.
Soit r le rang de la matrice $(A_{i_1}, ..., A_{i_l}) \in M_{m,l}(\mathbb{Z})$.
Montrons que $l = r + 1$.
D'après le théorème de Carathéodory appliqué à $Conv(A_{i_1}, ..., A_{i_l})$ et $E = Vect_{\mathbb{R}}(A_{i_1}, ..., A_{i_l})$ (qui est de dimension r), on a que $l \leq r + 1$. De plus, on sait que $r \leq l$. Mais si $l = r$, le fait que $0 \in Conv(A_{i_1}, ..., A_{i_l})$ donne une relation de dépendance linéaire entre ces l colonnes. Donc $r < l$ ce qui conclue.

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient une matrice $P \in GL_{r+1,m}(\mathbb{Z})$ telle que

$$P(A_{i_1}, ..., A_{i_{r+1}}) = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } M \in M_{r,r+1}(\mathbb{Z}) \text{ de rang } r.$$

Ainsi M a un noyau de dimension 1 sur $\mathbb{Q}$.
Comme $0 \in Conv(A_{i_1}, ..., A_{i_{r+1}})$, on peut choisir un vecteur $y \in \mathbb{Q}^{r+1}$ de ce noyau a coefficients positifs, et quitte à multiplier ce vecteur pour un entier, on peut supposer que y est à coordonnées entières.
On a alors $My = 0$ donc

$$P(A_{i_1}, ..., A_{i_{r+1}})y = 0.$$

Et comme P est inversible,

$$(A_{i_1}, ..., A_{i_{r+1}})y = 0.$$

On complète alors le vecteur y en un vecteur $x \in \mathbb{N}^n$ par des zéros pour tout $j \notin \{i_1, ..., i_{r+1}\}$.

$\square$

Remarque 0.3

L'interêt du théorème est de caractériser l'existence de solutions non triviales d'un système dipohantien en montrant que les colonnes de A sont liées dans $\mathbb{R}$.

On donne un autre corollaire du théorème de Carathéodory :

Corollaire 0.4

Si $\mathcal{A}$ est compact alors $Conv(\mathcal{A})$ est compact.

Démonstration.
On pose $n = dim(\mathcal{E})$ et $K = \{(t_1, ..., t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} \mid t_1 + ... + t_{n+1} = 1\}$.
K est compact.
Posons

$$f : (t_1, ..., t_{n+1}, A_1, ..., A_{n+1}) \in K \times \mathcal{E}^{n+1} \mapsto t_1 A_1 + ... + t_{n+1} A_{n+1} \in \mathcal{E}.$$

D'après le théorème de Carathéodory, $f(K \times \mathcal{A}^{n+1}) = Conv(\mathcal{A})$.
Or f est continue et $K \times \mathcal{A}^{n+1}$ est compact.
Donc $Conv(\mathcal{A})$ est compact. $\square$