Processus de Galton-Watson.

Cadre : De nombreux phénomènes d'évolution de population peuvent être modélisés en première approximation par un processus de branchement (réactions nucléaires en chaine, étude des gènes, survivance des noms de famille...).

Modélisation mathématique :
Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ et $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n < \infty$.
Soit $(X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une famille de variable aléatoire indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi $\mathbb{P}_X$.
On définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \end{cases}$$

L'idée est de modéliser avec la suite $(Z_n)_n$ la taille d'une population. Plus précisément, Z_n symbolisera le nombre d'individus à la $n^{\text{ème}}$ génération, et pour $i \in [|1, Z_n|]$, $X_{i,n}$ représente le nombre de descendants que l'individu de la $n^{\text{ème}}$ génération portant le numéro i à engendré (les individus de la population que l'on considère génèrent des enfants tous seuls ; on pourra, par exemple penser aux végétaux). Aussi, chaque individu à la probabilité p_n d'engendre n individus. On veut répondre à la question : quelle est la probabilité que la population considérée s'éteigne ?

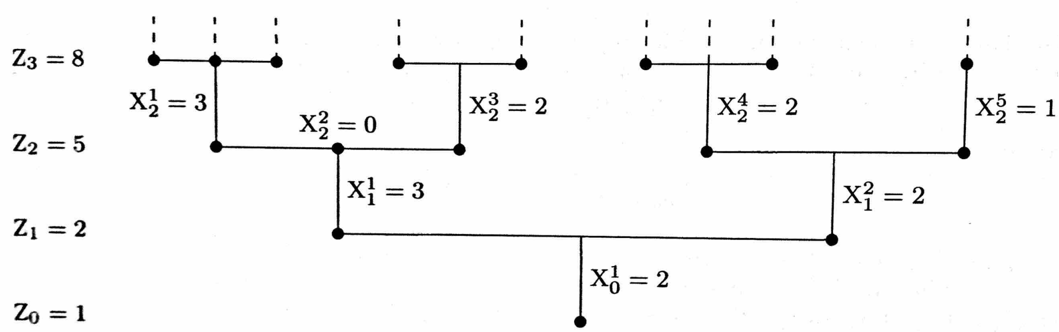

FIGURE 1 – Arbre de la desendance de Z_0.

Lemme 0.1
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la variable Z_n est indépendante de $X_{i,n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; Z_n ne dépend que de Z_{n-1} et de la famille $(X_{i,n-1})_{i\in\mathbb{N}}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate, il vient : Z_n ne dépend que de la famille $(X_{i,j})_{i\geq 0, j\leq n-1}$.
Et, par indépendance des variables $X_{i,j}$, on obtient que $\forall i \in \mathbb{N}, Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$. $\square$

Objectif : Calculer $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\ Z_n = 0)$.

Notations :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\pi_n := \mathbb{P}(Z_n = 0) \quad \text{et} \quad \pi_\infty := \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0) \quad \text{appelée probabilité d'exctinction.}$$

Comme $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$, la suite d'événements $(\{Z_n = 0\})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc :

$$\pi_\infty = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \pi_n.$$

Si $p_0 = 0$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n \geq 1$ ps et $\pi_\infty = 0$.
Si $p_0 = 1$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = 0$ ps et $\pi_\infty = 1$.
On suppose donc désormais que $p_0 \in]0, 1[$.

Proposition 0.2

On définit la fonction génératrice de X par $G : s \mapsto \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$.

On a les résultats suivants :

1. G est bien définie sur $[0, 1]$ et y est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. (a) G est strictement croissante sur $]0, 1[$.
   (b) G est convexe sur $]0, 1[$.
   (c) G est strictement convexe sur $]0, 1[\Leftrightarrow p_0 + p_1 < 1$.

Démonstration.
La série entière $\sum_{k\geq 0} p_k s^k$ ayant un rayon de convergence supérieure ou égale à 1 (car $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$), on a que la série $\sum p_n s^n$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$.

1. Interessons nous à la régularité de la série sur $[0, 1]$.
   $\forall k \in \mathbb{N}, s \mapsto p_k s^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, la série $\sum_{k\geq 0} p_k 1^k$ converge, et la série de fonctions $\sum_{k\geq 1} k p_k s^{k-1}$ converge normalement (car X est intégrable) donc uniformément sur $[0, 1]$.
   Par conséquent, d'après le théorème de dérivation des séries, G est bien définie et est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
2. On a, par théorème de dérivation terme à terme d'une série entière, :

$$\forall s \in [0, 1[, G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \text{ et } G''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2}$$

   Comme $p_0 < 1$, il existe $k_0 > 0$ tel que $p_{k_0} > 0$.
   (a) Ainsi : $\forall s \in]0, 1[, G'(s) \geq k_0 p_{k_0} s^{k_0 - 1} > 0$ et G est strictement croissante sur $]0, 1[$.
   (b) Aussi : $\forall s \in]0, 1[, G''(s) \geq k_0 (k_0 - 1) p_{k_0} s^{k_0 - 2} \geq 0$ et G est convexe sur $]0, 1[$.
   (c) Si $p_0 + p_1 = 1$, alors on a $k_0 = 1$ et G est affine donc n'est pas strictement convexe sur $]0, 1[$.
   Si $p_0 + p_1 < 1$, alors il existe $k_1 > 1$ tq $p_{k_1} > 0$ et $G'' > 0$ sur $]0, 1[$ d'où la stricte convexité.

□

Proposition 0.3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la série génératrice de Z_n par $G_n : s \mapsto \mathbb{E}[s^{Z_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) s^k$.
Comme précédemment, on peut montrer que G_n est bien définie sur $[0, 1]$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $G_n = \underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{n \text{ fois}}$ (sur $[0, 1]$).

Démonstration.
On procède par récurrence.
Initialisation : $G_1(s) = \mathbb{E}[s^{Z_1}] = \mathbb{E}[s^{X_{1,0}}] = \mathbb{E}[s^X] = G(s)$
Supposons que $G_n = G \circ \cdots \circ G$.

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) = \mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}}\right] &= \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_{i,n}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}} \mathbb{1}_{Z_n=k}\right)\right] \text{ car } Z_n < \infty \text{ ps, } X \text{ étant finie ps} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}} \mathbb{1}_{Z_n=k}\right] \text{ (par Fubini Tonelli, car les termes sont tous positifs)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}}\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Z_n=k}\right] \text{ (car } Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[s^{X_{i,n}}\right] \mathbb{P}(Z_n = k) \text{ (car les } X_{i,n} \text{ sont indépendants)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[s^{X}\right]^k \mathbb{P}(Z_n = k) \text{ (car les } X_{i,n} \text{ ont même loi)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) G(s)^k = G_n(G(s))
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence. □

Proposition 0.4

La probabilité d'extinction π_∞ est le plus petit point fixe de G sur l'intervalle $[0, 1]$.

Démonstration.
La proposition précédente donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall s \in [0, 1],\ G_{n+1}(s) = G(G_n(s))$.
En évaluant en 0, on obtient la relation : $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$, puis par continuité de G sur $[0, 1]$, on obtient que π_∞ est un point fixe de G.
Montrons que c'est le plus petit. Soit $u \in]0, 1]$ un point fixe de G. Par récurrence, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n \leq u$.
• Initialisation : on a $\pi_1 = G(\pi_0) = G(\mathbb{P}(Z_0 = 0)) = G(0) \leq G(u) = u$, car G est croissante.
• Supposons que $\pi_n \leq u$. Alors $\pi_{n+1} = G(\pi_n) \leq G(u) = u$, par croissance de G.
Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n \leq u$, donc par passage à la limite : $\pi_\infty \leq u$. □

Théorème 0.5

Si $m \leq 1$, alors $\pi_\infty = 1$.
Si $m > 1$, alors π_∞ est l'unique point fixe de G sur $]0, 1[$.

Démonstration.
Puisque $G(1) = 1$, le graphe de G coupe la droite $y = x$ sur l'intervalle $[0, 1]$ au moins au point $(1, 1)$. On a deux cas :
• Si $p_0 + p_1 = 1$ (ie $m = 1$) alors G est une fonction affine et comme $G(0) = p_0 > 0$, G a un unique point fixe en $(1, 1)$.

• Sinon, G est strictement convexe sur $]0,1[$ et il en va de même pour $x \mapsto G(x) - x$ qui s'annule donc au plus deux fois. [1]

Rappelons que l'on a aussi : $G(0) = p_0, G'(0) = p_1$ et $G(1) = 1, G'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = m$. Etudions la fonction $x \in [0,1] \mapsto G(x) - x$.

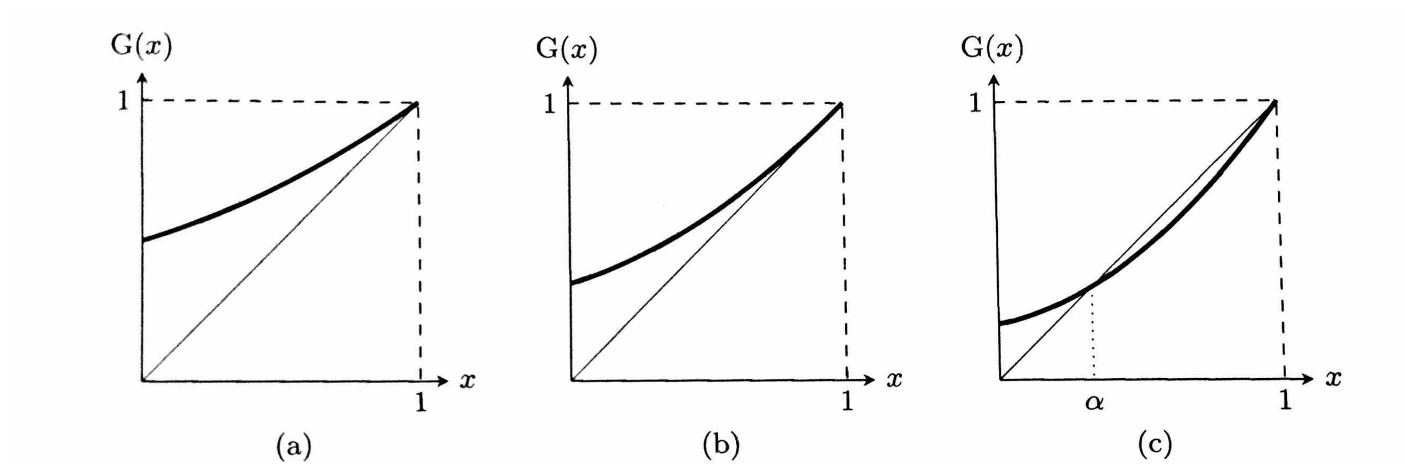

FIGURE 2 – Fonction génératrice de X, dans le cas : (a) $m < 1$, (b) $m = 1$ et (c) $m > 1$.

Supposons $m > 1$.

Alors $G' - 1$ est une fonction croissante de $p_1 - 1 < 0$ (car $p_1 = 1 \Rightarrow m = 1$ ou bien plus simplement car $p_0 > 0$) à $m - 1 > 0$, donc elle s'annule en un point $\alpha \in]0,1[$.
La fonction $G-\mathrm{Id}$ est alors décroissante sur $[0, \alpha]$ puis croissante sur $[\alpha, 1]$. Comme $G(0) - 0 = p_0 > 0$ et $G(1) - 1 = 0$, il existe un point dans l'intervalle $]0, \alpha]$ où $G-\mathrm{Id}$ s'annule.
π_∞ est donc l'unique point fixe de G sur l'intervalle $]0,1[$ (car G en a au plus 2).

Supposons $m \leq 1$.

Alors $G' - 1$ est une fonction croissante sur $[0,1]$, négative ou nulle en 1 ; donc négative sur $[0,1]$.
Donc $G-\mathrm{Id}$ est décroissante sur $[0,1]$, et s'annule en 1. Comme cette fonction admet au plus 2 annulations, elle ne s'annule qu'en 1 (car sinon elle s'annulerait sur un intervalle non-réduit à un singleton).
Par conséquent, $\pi_\infty = 1$.

□

Remarque :
Supposons que l'équation $G(x) = x$ admette une solution $0 < p < 1$. On a alors $p = \pi_\infty$ par la proposition précédente. De plus, puisque $G(p) - p = 0$ et $G(1) - 1 = 0$, le théorème de Rolle appliqué à $x \mapsto G(x) - x$ montre qu'il existe $z \in]p, 1[$ tel que $G'(z) = 1$. Comme G est strictement convexe on a nécessairement $m = G'(1) > 1$.

1. En effet, si cette fonction s'annule en trois points distincts, par le théorème de Rolle, sa dérivée s'annulera en deux points distincts, $a < b$. Mais $x \mapsto G(x) - x$ est convexe, donc sa dérivée est croissante, donc nulle sur $[a, b]$. Cela implique que $G' - 1$ n'est pas strictement croissante, et donc que $x \mapsto G(x) - x$ n'est pas strictement convexe. Attention à ne pas dire que "strictement convexe" équivaut à "dérivée seconde strictement positive" pour les fonctions deux fois dérivables (on pourra penser par exemple à la fonction $x \mapsto x^4$).

Remarque 0.6

On donne ici une première idée de l'évolution de la taille de la population, *i.e.* de la suite Z_n.

On a $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.
On va raisonner par récurrence.
• $Z_0 = 1$ donc $\mathbb{E}[Z_0] = 1 = m^0$.
• Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

<u>Méthode 1 :</u>

On peut dériver G_n (comme pour G), et on a, pour $s \in [0,1]$,

$$G'_{n+1}(s) = G'(s)(G'_n \circ G(s))$$

Donc en 1 :

$$G'_{n+1}(1) = \mathbb{E}[X](G'_n(G(1)) = mG'_n(1) = m^{n+1}$$

<u>Méthode 2 :</u>

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_{n+1}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}\middle| Z_n\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{i\leq Z_n} X_{i,n}\middle| Z_n\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{i\leq Z_n}\mathbb{E}\left[X_{i,n}|Z_n\right]\right] (\text{FT car} \geq 0 \text{ ps} \oplus \mathbb{1}_{i\leq Z_n}\ Z_n\text{-mesurable}) \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E}\left[X_{i,n}\right]\right] (X_{i,n} \perp\!\!\!\perp Z_n) \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} m\right] = m\mathbb{E}\left[Z_n\right] = m^{n+1}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la récurrence.

Remarque 0.7

En fait, la suite $(Z_n)_n$ est une chaîne de Markov issue de 1, dont l'espace d'états est dénombrable. L'état 0 est absorbant. La chaîne est transciente. La question est ici de savoir si elle "sort" de $\mathbb{N}$ par 0 ou par l'infini.