Méthode de Newton.

Théorème 0.1

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ avec $I = [c, d] \subset \mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe $a \in]c, d[$ tel que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$.
Alors pour x_0 assez proche de a, la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge vers a en vitesse quadratique.

✓ Avantages de la méthode : s'il y a convergence, celle-ci est rapide (souvent quadratique), elle nécessite un seul point de départ.
✓ Inconvénients de la méthode : f doit être suffisamment régulière, la convergence n'est pas assurée dans tous les cas, s'il y a plusieurs racines elle ne converge par forcément vers la plus proche du point de départ.

Démonstration.
Comme $f'(a) \neq 0$, quitte à travailler avec $-f$, on suppose que $f'(a) > 0$.
Donc f est localement strictement croissante sur un voisinage de a (car f' est continue). Donc, quitte à réduire I, on peut supposer que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' \neq 0$ sur I.
De plus, il existe $\alpha > 0$ tel que $J :=]a - \alpha, a + \alpha[\subset I$.
Posons $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ pour tout $x \in J$ (F est bien définie).
Soit $x \in J$. On a :

$$F(x) - a = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)}$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned} |F(x) - a| &\leq \frac{\sup_J |f''|}{2|f'(x)|}(a - x)^2 \\ &\leq C(a - x)^2 \qquad \text{avec } C = \frac{\sup_J |f''|}{2 \inf_J |f'||} \end{aligned}$$

La constante C est bien définie car f'' et f' sont continues sur I.
Quitte à réduire α, on peut supposer que $\alpha < 1/C$.
On a alors $F(x) \in J$.

Pour $x_0 \in J$, $x_{n+1} = F(x_n)$ et la suite $(x_n)_n$ est bien définie.
Par conséquent, si $x_0 \in J$, $x_n \in J$ et $|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2$.
Une récurrence immédiate montre que : $C|x_n - a|^2 \leq C^2|x_{n+1} - a|^2 \leq ... \leq (C|x_0 - a|)^{2n} \leq (\underbrace{C\alpha}_{<1})^{2n}$.

Cette inégalité prouve la convergence d'ordre 2 de $(x_n)_n$ vers a.
On conclue donc que $(x_n)_n$ converge vers a en vitesse quadratique.

$\square$

Proposition 0.2

Sous les hypothèses du théorème précédent, en supposant que f soit convexe sur I et que $f'(a) > 0$, on a que la suite $(x_n)_n$ converge en vitesse quadratique vers a pour tout $x_0 \geq a$.

Démonstration.
Désormais, notons $J = [a, d]$.
Comme f est convexe sur J, $f' > 0$ sur J et de plus, comme f s'annule en a, on a $f \geq 0$ sur J.
Soit $x \in J$.
On a

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x.$$

De plus, par l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe $z \in]a, x[$ tel que

$$F(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x-a)^2 > 0 \qquad \text{car } f'' \text{ et } f' \text{ sont strictement positives.}$$

Aussi, pour $x_0 \in J$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in]a, d]$ car $a \leq F(x) < x \leq d$.
Donc (x_n) est strictement décroissante, minorée par a qui est l'unique point fixe de F sur $[a, +\infty[$.
Donc $(x_n)_n$ converge vers a.
De plus, l'inégalité $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$ est toujours vraie donc la convergence est quadratique. □

Interprétation géométrique :
La relation démontrée dans le théorème se réécrit :

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

ce qui exprime que $x_{n+1} = F(x_n)$ est l'abscisse de l'intersection avec l'axe Ox de la droite $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$, qui est la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_n.

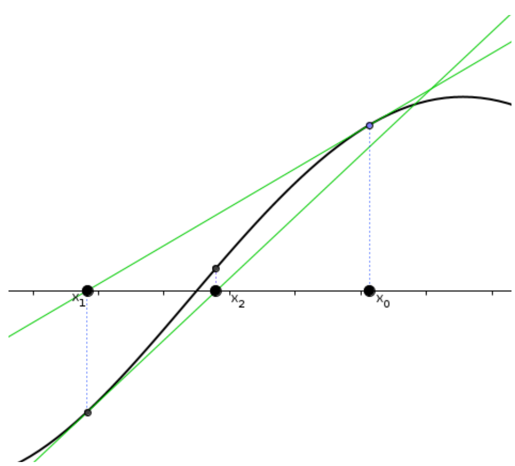

FIGURE 1 – Méthode de Newton.

Exemple 1 :
Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$; imaginons qu'on veuille estimer $a = \sqrt{y}$. Soit $f : x \mapsto x^2 - y$, définie sur un intervalle $[c, d]$, avec $0 < c < d$ et $c^2 < y < d^2$. Pour approcher a, on doit itérer la fonction $F(x) = x - \frac{x^2 - y}{2x}$.
On a alors : $F(x) - a = \frac{(x-a)^2}{2x}$ et $F(x) + a = \frac{(x+a)^2}{2x}$.

Donc, en prenant $x_0 \in]a, d]$ et en posant $x_n = F^n(x_0)$, on obtient : $\frac{x_n+a}{x_n-a} = \left(\frac{x_0+a}{x_0-a}\right)^{2^n}$.

Par conséquent : $1 + \frac{2a}{x_n-a} = \left(1 + \frac{2a}{x_0-a}\right)^{2^n} \geq 1 + \left(\frac{2a}{x_0-a}\right)^{2^n}$.

On obtient donc un encadrement de l'erreur : $0 < x_n - a \leq 2a\left(\frac{x_0-a}{2a}\right)^{2^n}$.

Exemple 2 : Approximation du nombre d'or

Le nombre d'or $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ est un point fixe de $F(x) = \sqrt{1+x}$ sur l'intervalle stable $[0, +\infty[$ ainsi que de $G(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle stable $[\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.

On a $F'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $G'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

On sait pour ces deux fonctions qu'il y a bien convergence car $|F'(x)| \leq 1/2$ et $|G'(x)| \leq 1/2$.

A priori, on sait seulement que la convergence est linéaire mais on ne sait pas plus. (voir **Théorème** ci-dessous)

La méthode de Newton appliquée à $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ sur $[c, d] = I = [1, 2]$ (qui vérifie bien les hypothèses) offre donc directement une convergence plus rapide.

Théorème 0.3 : *Méthode du point fixe et convergence*

Soient $F : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$ un point fixe de F. Alors :

i) Point fixe attractif.
Si $|F'(a)| < 1$, il existe un intervalle fermé J centré en a, stable par F tel que pour $x_0 \in J$, la suite $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers le point fixe a.

ii) Sous les conditions de i), et si F' ne s'annule pas sur J, si $x_0 \neq a$, alors pour tout n, $x_n \neq a$ et

$$x_{n+1} - a \underset{n \to +\infty}{\sim} F'(a)(x_n - a)$$

ie convergence d'ordre 1, convergence linéaire.

iii) Point fixe superattractif.
Sous les conditions de i), et si F est de classe $\mathcal{C}^2$, si $F'(a) = 0$, si F'' ne s'annule pas sur J et si $x_0 \neq a$, alors pour tout n, $x_n \neq a$ et

$$x_{n+1} - a \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{F''(a)}{2}(x_n - a)^2$$

ie convergence d'ordre 2, convergence quadratique (différent de la convergence en moyenne quadratique).

iv) Point fixe répulsif.
(Si $|F'(a)| > 1$, il existe un intervalle fermé J centré en a, tel que, pour $x_0 \in J$ et $x_0 \neq a$, la suite x_n sorte de J.)