NOM : Groupe de TD N^o

Prénom : Etudiant N^o

Ni calculatrice, ni téléphone, ni document.
Les fractions doivent être simplifiées.

Rappels : $\widehat{b} = \frac{c_{xy}}{s_x^2}$, $\widehat{a} = \bar{y} - \widehat{b}\bar{x}$, $R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2} = r_{xy}^2$.

Exercice 1 [2 pt] Soit l'histogramme normalisé suivant, basé sur des classes de 6 minutes chacune :

Le nombre total de données étant de 200, quel est le nombre de données dont la valeur est comprise entre 48 et 54 mn ?

Réponse : $n = 6 \times 0,02 \times 200 = 24.$

Exercice 2 [4pt] Soit $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$. On note $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

1. Donner les deux formules du cours pour s_x^2.

   Réponse : $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2.$

2. Soit $y = (x_1, x_2, \ldots x_n, x_1, x_2, \ldots x_n)$. Exprimer s_y^2 en fonction de s_x^2.

Réponse :

$$\bar{y} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n x_i\right) = \bar{x}.$$

$$s_y^2 = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{y})^2\right) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) = s_x^2.$$

Exercice 3 [4pt] Pour convertir en degrés Celsius une température donnée en degrés Fahrenheit, il suffit de soustraire 32 et de multiplier par 5/9.

La température moyenne à Rennes au mois de janvier 2019 à été de 5,5 degrés Celsius avec une variance de 16. Donner la moyenne et l'écart-type de ces températures en degrés Fahrenheit. On demande les valeurs numériques exactes.

Réponse : *On note t_c la température en Celsius et t_f la température en Fahrenheit. On a $t_c = \frac{5}{9}(t_f - 32)$ donc*

$$\bar{t_f} = \frac{9}{5}\bar{t_c} + 32 = 9.9 + 32 = 41.9$$

$$s_{t_f} = \frac{9}{5}s_{t_c} = 7.2$$

Exercice 4 [2pt] Calculer la médiane et le troisième quartile des données suivantes :

2 4 7 9 12 15 17 40 707 880 881 882 883 1024 2048

Réponse : $\lceil N/2 \rceil = 8$ *donc* $Q_2 = 40$ *et* $\lceil 3N/4 \rceil = 12$ *donc* $Q_3 = 882$.

Exercice 5 [4pt] On cherche à expliquer le prix d'une ampoule en fonction de sa longévité. On se propose d'utiliser une régression linéaire. On dispose d'un lot d'ampoules pour lesquelles on a mesuré un prix moyen de 5 €, une longévité moyenne de 500 heures, une corrélation entre ces deux variables de 0.98, une variance de prix de 4, un écart-type de longévité de 200 heures.

1. Donner l'équation de la droite de régression. On demande les valeurs numériques exactes.

   Réponse : *On considère* y *le prix de l'ampoule en fonction de sa longévité* x. *On a* $c_{x,y} = r_{x,y} \times s_x \times s_y$ *donc*
   $$\hat{b} = \frac{r_{x,y} s_y}{s_x} = \frac{0.98 \times 2}{200} = 0.0098,$$
   $$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 5 - \hat{b} \times 500 = 5(1 - 100 \times \hat{b}) = 0.1.$$
   Donc $y = 0.0098x + 0.1$.

2. Qualifier la qualité de l'ajustement.

   Réponse : $R^2 = r_{x,y}^2 = 0.96$ *: Bon (très bon) ajustement.*

Exercice 6 [4pt] On cherche à prédire la prise de poids y de souris de laboratoire en fonction des doses g de matière grasse et s de sucre qu'on leur donne à manger. On a donné à quatre souris les doses $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, et $(1,1)$. On a observé les prises de poids respectives de 15g, 15g, 25g, 45g. On cherche à expliquer y par g et s à l'aide d'une régression linéaire multiple. La prise de poids en absence de sucre et de matière grasse n'est pas supposée nulle. Avec les conventions habituelles, le calcul donne $\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. On donne à une nouvelle souris les doses 4 et 3 en matière grasse et en sucre. Quelle est la prise de poids attendue.

   Réponse : $y = \widehat{\beta_1} + \widehat{\beta_2} g + \widehat{\beta_3} s = 10 + 20 \times 4 + 10 \times 3 = 120g$.

2. Donner la matrice X. Calculer le produit $X^T X$.

Réponse : *On a*
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix},$$
donc $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $X^T X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.