INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES
Département de Mathématiques

Année universitaire 2017–2018
2ème année **Mathématiques**
Groupe K - Octobre 2017

Contrôle continu n° 1 : Correction.

Exercice 1 : Une suite explicite. *(3 pts)*

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2n+1}{3n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2n+1}{3n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2n+1}{3n^2+1},$$
$$\frac{2n+1}{3n+1} \leq u_n \leq \frac{2n^2+n}{3n^2+1}.$$

On en déduit d'après le théorème des gendarmes que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $2/3$.

Exercice 2 : Une suite implicite. *(7 pts)*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   f_n est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et $f_n'(x) = 4nx^{n-1} + 4x + 3 > 0$ pour tout $x \in [0,1]$.
   Ainsi, f_n est une fonction strictement croissante. *[1 pt]*

   f_n est une fonction continue et strictement croissante. De plus, $f_n(0) = -7/8 < 0$ et $f_n(1/2) = \dfrac{4}{2^n} + \dfrac{9}{8} > 0$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x_n \in]0, 1/2[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. *[1,5 pts]*

2. Soit $x \in [0,1]$.
   Alors $x^{n+1} \leq x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Donc $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *[1 pt]*

   En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \geq 0$. Donc $f_n(x_{n+1}) \geq f_n(x_n)$.
   Comme f_n est croissante, on en déduit que $x_{n+1} \geq x_n$.
   Donc $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par $1/2$.
   On en déduit que la suite $(x_n)_n$ converge. *[1,5 pts]*

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ pour tout $x \in]0,1[$.
   Comme $(x_n)_n$ est croissante, on a :
   $$0 < x_1 \leq x_n < 1/2 \ \text{ pour tout } n \geq 1.$$
   On a donc, pour tout $n \geq 1$,
   $$x_1^n \leq x_n^n < \frac{1}{2^n}.$$
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (2x_n^2 + 3x_n) = 7/8$. En notant x_∞ la limite de la suite $(x_n)_n$, on a
   $$2x_\infty^2 + 3x_\infty = 7/8.$$
   L'équation $2x_\infty^2 + 3x_\infty - 7/8 = 0$ possède deux solutions
   $$x_{\infty,1} = -7/4 < 0 \quad \text{et} \quad x_{\infty,2} = 1/4 > 0.$$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1/4$. *[2 pts]*