INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES
Département de Mathématiques

Année universitaire 2017–2018
2ème année **Mathématiques**
Groupe K - Décembre 2017

Contrôle continu n° 2 : Correction.

Exercice 1 : Une équation différentielle. *(4 pts)*

On considère l'équation différentielle homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$.
L'équation caractéristique associée $X^2 - 3X + 2$ admet deux racines $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$.

On en déduit les solutions de l'équation différentielle homogène :

$$\mathcal{S}_h = \{x \mapsto Ae^x + Be^{2x} \quad ; \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Déterminons une solution particulière de l'équation différentielle. Nous allons chercher une solution sous la forme d'un polynôme de degré 3. Soient a, b, c et d des réels.
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
$y' = 3ax^2 + 2bx + c$;
$y'' = 6ax + 2b$.
Si y est solution de l'équation différentielle alors

$$x^3 = 2ax^3 + x^2(-9a + 2b) + x(6a - 6b + 2c) + (2b - 3c + 2d).$$

D'où, $a = 1/2$, $b = 9/4$, $c = 21/4$ et $d = 45/8$.

Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{45}{8} \quad ; \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 2 : *(6 pts)*

1. On remarque tout d'abord que pour $x = y = 0$, $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$. *[1 pt]*
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^x f(h) + e^h f(x) - f(x)}{h} = e^x \frac{f(h) - f(0)}{h} + f(x)\frac{e^h - e^0}{h}.$$

   Comme f est dérivable en 0, on en déduit que

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = e^x f'(0) + f(x).$$

   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f'(x) = f(x) + e^x f'(0). \qquad \textit{[2 pts]}$$

2. L'équation différentielle homogène a pour solutions

   $$\{x \in \mathbb{R} \mapsto Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}\}.$$

   On détermine une solution particulière h de l'équation différentielle à l'aide de la méthode de la variation de la constante. On pose

   $$h(x) = C(x)e^x,$$

$$\text{donc} \quad h'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x$$

d'où $C'(x) = f'(0)$. On en déduit une solution particulière

$$h(x) = xf'(0)e^x.$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto (C + xf'(0))e^x, \quad C \in \mathbb{R}\}. \qquad \textit{[2 pts]}$$

Comme $f(0) = 0$, on en déduit les fonctions f dérivables en 0 et satisfaisant la relation fonctionnelle de l'énoncé :

$$f(x) = xf'(0)e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \textit{[1 pt]}$$