1. Ensembles et dénombrements

Exercice 1.1. Dans l'ensemble $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, on considère les trois sous-ensembles

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{1,3,5\}, \quad C = \{3,4,5,6\}$$

Déterminer les sous-ensembles suivants

(1) $A \cup (B \cap C)$
(2) $(A \cup B) \cap C$
(3) $(A \cup B)^c$
(4) $A \backslash B$
(5) $A \cap B \cap C$
(6) $A \Delta B$

Exercice 1.2. Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Vérifier sur des diagrammes les propriétés suivantes :

(a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
(c) ${}^c(A \cap B) = {}^cA \cup {}^cB$
(d) ${}^c(A \cup B) = {}^cA \cap {}^cB$

Exercice 1.3. Trouver un exemple d'ensembles E, F, G tels que $(E \backslash F) \backslash G \neq E \backslash (F \backslash G)$

Exercice 1.4. Soit Ω un ensemble, et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble. Supposons $card(A) = p$, et $card(\Omega) = n$.

(a) Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω ?
(b) Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω disjoints de A ?
(c) Quel est le nombre de sous-ensembles de Ω contenant A ?

Exercice 1.5. * On veut placer n convives autour d'une table circulaire avec n chaises. Combien y a-t-il de dispositions possibles, sachant que deux dispositions sont identiques si chaque convive a le même voisins de gauche et le même voisins de droite ?

Exercice 1.6. Combien de suites de résultats possibles (tenant compte de l'ordre) y a-t-il si l'on jette un dé quatre fois ? Et combien de séries contenant au moins un 6 ?

Exercice 1.7. Un jeu de cartes contient 32 cartes (16 noires et 16 rouges). On tire trois fois (sans remise). Combien de suites de résultats y a-t-il ? Et combien de main contiennent exactement une carte rouge ?

Exercice 1.8. Écrire les développements de $(a+b)^5$, de $(x-y)^3$.

Exercice 1.9. (Coefficients binomiaux)

(a) Si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(b) Si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$.
En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
(c)* Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (formule du binôme de Newton)
(d) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
(e) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. (Par exemple : $\binom{0}{4} - \binom{1}{4} + \binom{2}{4} - \binom{3}{4} + \binom{4}{4} = 0$)

Exercice 1.10. (a) Rappeler la formule du binôme de Newton.

(b) Que vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$?

(c) Dériver la somme précédente . En déduire une expression simple de

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1},$$

puis de la somme $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

Exercice 1.11. Une association est formée de 35 personnes dont 15 hommes et 20 femmes. On se propose de former un bureau de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver 2 femmes et 3 hommes. Déterminer de combien de façons on peut former ce bureau dans les cas suivants :

(a) chaque membre de l'association est candidat ;

(b) deux hommes refusent d'être candidat ;

(c) un homme et une femme refusent de siéger ensemble.

Puis refaire l'exercice dans le cas où on se propose de former un bureau de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins 2 femmes et 2 hommes.

Exercice 1.12. Dans tout l'exercice les *tiroirs* sont toujours différenciés les uns des autres (donc pas interchangeables).

(a) Combien y a-t-il de façons de ranger 5 objets indiscernables dans 8 tiroirs de sorte qu'il n'y ait pas plus d'un objet par tiroir ?

(b)* Combien y a-t-il de façons de ranger 8 objets dans 3 tiroirs ?

(c) Reprendre les deux questions précédentes en supposant que les objets sont discernables.

Exercice 1.13. * Il y a 4 types de gâteaux dans une patisserie. De combien de façons peut-on acheter 7 gâteaux ?

Exercice 1.14. * On considère les cinq chiffres $1, 2, 3, 4, 5$. On considère chaque permutation de ces cinq chiffres comme représentant un entier (23451= vingt-trois mille quatre cent cinquante-et-un). Quelles est la somme de tous les entiers ainsi obtenus ?

2. Espaces probabilisés

Exercice 2.1. On considère un jeu avec 32 cartes.

(a) Combien y a-t-il de mains de 4 cartes ?

(b) Combien y a-t-il de mains de 4 cartes contenant exactement deux rois ?

(c) Quelle est la probabilité qu'une donne de 4 cartes contienne exactement deux rois ?

Exercice 2.2. Une urne contient 2 boules rouges et 5 noires. Les joueurs A et B tirent à tour de rôle une boule, sans remise, jusqu'à ce que une boule rouge sorte (A commence). Quelle est la probabilité que ce soit A qui tire la première boule rouge ?

Exercice 2.3. Dans une loterie, le joueur doit choisir 8 nombres entre 1 et 40. Le tirage sélectionne 8 nombres parmi les 40. En admettant que le tirage est équiprobable pour les C_{40}^{8} combinaisons, quelle est la probabilité que le joueur ait

(a) les 8 bons nombres ?

(b) 7 parmi les 8 bons nombres ?

(c) aucun bon nombre ?

Exercice 2.4. Trois chasseurs tirent simultanément sur un canard. Leurs probabilités de tuer le canard sont p_1, p_2, p_3. Quelle est la probabilité que le canard soit encore vivant après ce triple tir ?

Exercice 2.5. On lance huit fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre fois pile et quatre fois face ?

Exercice 2.6. * Combien de fois faut-il lancer un dé à six faces (équilibré !) pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir un 6 ? Et plus de neuf chances sur dix ? Plus de quatre-vingt-dix-neuf chances sur cent ?

3. Variables aléatoires discrètes

Exercice 3.1. La fonction de répartition d'une v.a. Y est la suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.5 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0.6 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 0.8 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 0.9 & \text{si } 3 \leqslant x < 3.5 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3,5 \end{cases}$$

Calculer la loi de probabilité de Y.

Exercice 3.2. Admettons que le nombre d'erreurs par page dans un livre suive la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}5$ – donc $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda)^k}{k!}$ pour $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Calculer la probabilité que, sur une page donnée, il y a au moins 3 erreurs.

Exercice 3.3. On lance deux dés honnêtes. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3.4. Soit X une variable aléatoire discrète. Que peut-on dire si la variance de X est 0 ?

Exercice 3.5. Une pièce de monnaie porte sur une face l'inscription “17” et de l'autre face “20”. (Ceci peut être modélisé par une variable aléatoire X de loi $\mathbb{P}(X = 17) = 0,5$ et $\mathbb{P}(X = 20) = 0,5$.)

1) Soit $Y = \frac{X-17}{3}$. Quelle est la loi de Y ?

2) Trouver l'espérance et la variance. Indication : comparer avec la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$

Exercice 3.6. Soit X une variable aléatoire. On suppose $\sigma(X) > 0$ On appelle variable aleatoire centrée réduite associée à X, la variable aléatoire X^* définie par :

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

Trouver $\mathbb{E}(X^*)$ et $\mathbb{V}(X^*)$.

Exercice 3.7. Soit X une variable aléatoire qui est distribué selon la loi Binomiale de paramètre (n, p), c.à.d., $X \sim \mathcal{B}in(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer si $\epsilon > 0$ alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{\epsilon^2 n}.$$

Exercice 3.8. Soir X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{V}(X) = 5$. Calculer $\mathbb{E}((2 + X)^2)$ et $\mathbb{V}(4 + 3X)$.

Exercice 3.9. Soit X une variable aléatoire discète prenant ses valeurs uniformément sur $\{0,1,2\}$.

1) Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$ en donnant son support et $\mathbb{P}(Y = \cdot)$. Quelle est son espérance ?

2) Déterminer la loi de $Z = X^2$ en donnant son support et $\mathbb{P}(Z = \cdot)$. Quelle est son espérance ?

3)* Déterminer la loi de $W = \frac{1}{1+X}$ en donnant son support et $\mathbb{P}(W = \cdot)$. Quelle est son espérance ?

Exercice 3.10. On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes avec remise. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus. Donner la loi de X, son espérance, sa variance, et son écart-type.

Exercice 3.11. Toujours avec un jeu de 32 cartes, on effectue une série infinie de tirages successifs, en remettant chaque fois la carte tirée.

(a) Soit Y, le rang d'apparition du premier roi. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.

(b) Soit Z, le nombre de cartes autres qu'un roi qu'il aura fallu tirer pour obtenir le premier loi. Donner, sans calcul, la probabilité $\mathbb{P}(Z = k)$ $\forall k \geq 0$, son espérance et sa variance.

Exercice 3.12. * On lance une pièce de monnaie un certain nombre de fois jusqu'à obtenir "pile". On s'arrête la première fois où on obtient "pile". On touche alors une somme d'argent égale à 2 puissance le nombre de fois qu'on a obtenu "face". On note X cette somme. Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 3.13. * Pour une variable aléatoire X binomiale d'espérance 6 et de variance 2,4 trouver $\mathbb{P}(X = 5)$.

Exercice 3.14. * Soit X une variable aléatoire de Poisson avec paramètre λ. Pour une valeur $k \in \mathbb{N}$ donnée, quelle est la valeur de λ qui maximise $\mathbb{P}(X = k)$?

4. Probabilité conditionnelle et indépendance

Exercice 4.1. (Démonstration que la probabilité conditionnelle est bien une probabilité) Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers Ω, et soit $B \subset \Omega$ un événement avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Montrer que la fonction qui à l'événement A associe le nombre $\mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur Ω.

Exercice 4.2. Pour une famille avec exactement deux enfants, calculer les probabilités suivantes.

(a) Sachant que l'ainée est une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant est aussi une fille ?

(b) Sachant qu'il y a au moins une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant est aussi une fille ?

Exercice 4.3. (Indépendance multiple) Commençons avec une définition : trois événements A, B, C sont dits *deux à deux indépendants* si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \text{ et } \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \text{ et } \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Ils sont dits *mutuellement indépendants* si

$$\text{ils sont deux à deux indépendants et en plus } \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

Soit, par exemple $\Omega = \{\text{familles avec deux enfants}\}$. Considérons les trois événéments $A =$"la fratrie est mixte", $B =$"l'enfant ainé est une fille", $C =$"le cadet est un garçon".

(a) Montrer que ces trois événements sont deux à deux indépendants.

(b) Montrer que ces trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 4.4. Dans une population on trouve une proportion de $\frac{1}{10000}$ individus qui portent un certain virus. Il y a un test pour la présence de ce virus. Ce test n'est pas parfait : si un individu porte le virus, alors le test le détecte avec une probabilité de 0,99. Si un individu ne porte pas le virus, le test donne un résultat positif (érroné) avec probabilité de 0,001.

(a) Si on tire un individu au hasard de la population, on lui fait passer le test, et le résultat est positif, quelle est la probabilité qu'il porte vraiment le virus ?

(b) À première vue, le résultat obtenu en (a) est extrêmement surprenant ! Expliquez-le en quelques phrases françaises.

Exercice 4.5. A quelle condition deux événements incompatibles sont-ils indépendants ?

Exercice 4.6. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p – donc $\mathbb{P}(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ Démontrer que X est une "variable aléatoire sans mémoire" :

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > K + k \mid X > K)$$

avec $K \in \mathbb{N}^*$. Indication : montrer d'abord que $\mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k$.

Exercice 4.7. On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard. On expose une face au hasard. Elle est rouge. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ?

Exercice 4.8. Avant de partir en vacances tu pries ton voisin de bien vouloir arroser une plante. Sans arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,8$; avec arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,15$. Tu es sûr à 90 % que ton voisin l'arrosera.

(1) Quelle est la probabilité que la plante soit vivante à ton retour ?

(2) Si elle est morte, quelle est la probabilité que le voisin ait oublié de l'arroser ?

Exercice 4.9. * Soit n un entier positif. On considère n individus $I_1, I_2, \ldots, I_n$; ces individus mentent avec probabilité $p\,(0 < p < 1)$, et leurs comportements sont indépendants. Une information (sous forme de oui ou non) est donnée à I_1 qui la transmet à I_2, ... qui la transmet à I_n, qui l'annonce au monde. Quelle est la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise, c.à.d. que l'annonce de I_n coincide avec l'information donnée à I_1 ? Montrer que $\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2}$. (Indication : se souvenir des solutions des exercices 1.9(d) et (e).)

Exercice 4.10. * (Le jeu des trois portes) Le jeu des trois portes était un jeu télévisé populaire (Let's make a deal) diffusé dans les années 1970 aux états-Unis. Le joueur est placé devant 3 portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture que le joueur peut gagner. Derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le présentateur connait la position de la voiture. Le joueur doit d'abord désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui est ni celle choisie par le candidat, ni celle qui cache la voiture. Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte initialement choisie, ou bien de changer son choix vers la troisième porte.

(a) Quelles sont ses chances de gagner la voiture s'il garde son choix initial ?

(b) Quelles sont ses chances de gagner la voiture s'il choisit la troisième porte ?

5. Variables aléatoires continues

Exercice 5.1. Le nombre de minutes qu'un joueur de base-ball particulier se trouve sur le terrain suit la densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 10 \\ 0,025 & \text{si } 10 \leqslant x < 20 \\ 0,05 & \text{si } 20 \leqslant x < 30 \\ 0,025 & \text{si } 30 \leqslant x < 40 \\ 0 & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

Trouver la probabilité que ce joueur soit actif :

(a) plus de 15 minutes.
(b) entre 20 et 35 minutes.
(c) moins de 30 minutes.

Exercice 5.2. Une variable aléatoire X a une densité

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver c, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 5.3. Une variable aléatoire X a une densité

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (x+1) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Trouver c, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$.

(2) Quelle est la densité de la variable aléatoire X^2.

(3) Calculer de 2 manière différentes l'espérance de X^2.

(4) Quelle est la densité de la variable aléatoire $2X+3$.

(5) Calculer de 2 manière différentes l'espérance de $2X+3$.

Exercice 5.4. Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0,2]$.
1) Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$ en donnant la densité. Quelle est son espérance ?
2) Déterminer la loi de $Z = X^2$ en donnant la densité. Quelle est son espérance ?
3)* Déterminer la loi de $W = X^3$ en donnant la densité. Quelle est son espérance ?

Exercice 5.5. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot (1-x)^{1/3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une densité. Soit Y une variable aléatoire ayant pour densité f.
2) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire Y. Donnez en une représentation graphique.
3) Quelle est l'espérance de Y ?
4) Calculez la probabilité de l'évenement $\{0.4 < Y < 1.2\}$.

Exercice 5.6. (a) Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Rappelons que nous notons $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de répartition de cette loi. Sachant que $\Phi(-1) = 0,15866\ldots$, $\Phi(0) = 0,5$ et $\Phi(1) = 0,84134$, déterminer la probabilité

$$\mathbb{P}(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma])$$

(b) Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, pour $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ arbitraires. Déterminer la probabilité

$$\mathbb{P}(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma])$$

Exercice 5.7. Soit W une variable aléatoire à densité de loi $\mathcal{N}(0;1)$. Donner des valeurs approchées de $\mathbb{P}(W < 1.84)$, $\mathbb{P}(W > -1.18)$, $\mathbb{P}(-1.18 < W < 1.84)$ et $\mathbb{P}(|W| < 1.18)$. Pour quel t a-t-on $\mathbb{P}(W < t) = 0.03$?

Exercice 5.8. On suppose que la taille mesurée en mètre des garçons de 20 ans suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ. On sait que 84% des garçons de 20 ans mesurent moins de 1 m 86 et que 97% mesurent plus de 1 m 58. Déterminer m et σ.

Exercice 5.9. Chaque année, M. Durand effectue deux fois par jour, 5 jours par semaine et pendant 46 semaines, un trajet en voiture dont la durée est une v.a.r. Y qui suit une loi d'espérance 45 min et d'écart-type 10 min. On suppose que les durées des trajets sont mutuellement indépendantes. Soit X la somme de toutes les durées de trajets.

1) Justifier que l'on peut approximer la loi de $W = \frac{X-460*45}{\sqrt{46000}}$ par une gaussienne centrée réduite.

En utilisant l'approximation précédente, quelle est la probabilité pour que M. Durand passe au moins 350 h dans sa voiture au cours de l'année ?

2)* En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pouvez vous majorez la probabilité pour que M. Durand passe au moins 350 h dans sa voiture au cours de l'année ?

3)* Qu'en pensez-vous ?

Exercice 5.10. Un dé régulier est lancé 9 000 fois. On cherche à déterminer la probabilité de l'évènement on a obtenu 6 entre 1 400 et 1 600 fois. On note X la v.a.r. égale au nombre de 6 obtenus.

1) Quelle est la loi de X ?

2) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?

3) Calculer la probabilité demandée dans l'énoncé.

4) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de la probabilité demandée. Commenter.

Exercice 5.11. * Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

On suppose que F est continue et strictement croissante.

Quelle est la loi de $Y = F(X)$?

Exercice 5.12. * Soit N un entier. On choisit indépendamment N nombres réels sur l'intervalle $[0, N]$ selon la loi uniforme $\mathcal{U}(0, N)$. On note X_N le plus petit des nombres obtenus. On va étudier la variable aléatoire X_N :

(a) Pour tout $t \in [0, N]$, calculer $\mathbb{P}(X_N > t)$.

(b) En déduire la fonction de répartition F_{X_N} de X_N.

(c) Pour $t > 0$ fixé, calculer $\lim_{N\to\infty} F_{X_N}(t)$. Indication : vous pouvez admettre la formule : $\lim_{N\to\infty}(1 + \frac{x}{N})^N = e^x$.

(d) Donner un sens exact à la phrase "Pour N très grand, X_N est distribué selon une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$".

Examen

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les exercices sont indépendants. Le sujet comporte 1 page.

Exercice 1 :
Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=1)=\dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(X=2)=\dfrac{1}{2}$.

1. *[2 pts]* Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. *[1,5 pts]* Calculer la probabilité que X soit positif.

Exercice 2 :
Soit Y une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(Y)=2$ et $\mathrm{Var}(3Y-1)=27$.

1. *[1 pt]* Calculer $\mathrm{Var}(Y)$.
2. *[1,5 pts]* Calculer $\mathbb{E}[(Y-3)^2]$.

Exercice 3 : Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.
On plante 100 tulipes dans un jardin. La probabilité qu'une tulipe fleurisse est de $\dfrac{4}{5}$, indépendamment des autres tulipes. On note S la variable aléatoire qui modélise le nombre de tulipes qui ont fleuri.

1. (a) *[1,5 pts]* Quelle est la loi de S ? Justifier la réponse.
   (b) *[1 pt]* Donner l'espérance et la variance de S.
2. (a) *[1,5 pts]* Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. À l'aide d'un théorème du cours, approximer la probabilité suivante avec une intégrale :
   $$\mathbb{P}\left(\frac{S-80}{4}\in[a,b]\right).$$
   (b) *[2 pts]* En déduire une approximation de la probabilité d'avoir au moins 84 fleurs.
   On s'aidera d'une des valeurs de la table suivante ; si on note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on a : $\Phi(0)=0,50$; $\Phi(0,1)=0,54$; $\Phi(0,84)=0,80$; $\Phi(1)=0,84$ et $\Phi(1,6)=0,95$.

Exercice 4 : *[1,5 pts]*

Une variable aléatoire possède la densité de probabilité $g(x)=\begin{cases} cxe^{-x} & \text{si } x\in[1,2] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Déterminer la valeur de c.

Exercice 5 :
On note X la variable aléatoire qui possède la densité de probabilité suivante

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}(x+1) & \text{si } x\in[0,1] \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}.$$

1. *[3 pts]* Calculer l'espérance et la variance de X.
2. *[1,5 pts]* Quelle est la probabilité que X soit comprise entre $0,5$ et 2 ?

Exercice 6 :
Une étude nationale sur les activités extra-scolaires des élèves a montré que :

➤ la probabilité qu'un élève fasse de la musique est $\dfrac{1}{3}$;

➤ la probabilité qu'un élève fasse du sport est $\dfrac{3}{5}$.

On suppose que le fait de jouer de la musique est indépendant de la pratique sportive.

1. *[1,5 pts]* Quelle est la probabilité qu'un élève fasse du sport et de la musique ?
2. *[1,5 pts]* Quelle est la probabilité qu'un élève pratique au moins une de ces 2 activités extra-scolaires ?

Examen

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction. Toute réponse devra être précisément justifiée.

Durée de l'épreuve : 1 heure

Exercice 1 : *(1 point)*
Démontrer par le calcul ou par un argument d'analyse combinatoire que $C_n^p = C_n^{n-p}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$.

Exercice 2 : Dans cet exercice, vous effectuerez les calculs et ne simplifierez par les fractions.
Dans une population, il y a 5% de daltoniens chez les hommes et 0.25% chez les femmes. 48% de la population sont des hommes.

1. *(2 points)* On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit daltonienne ?
2. *(2 points)* La personne est daltonienne. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un homme ?

Exercice 3 : Dans cet exercice, vous effectuerez les calculs et donnerez la valeur exacte des résultats.
Soit X, une variable aléatoire qui suit une loi normale, de moyenne ν et de variance σ^2, et telle que :
$\mathbb{P}(X < 3) = 0.15866$ et $\mathbb{P}(X > 12) = 0.02275$

1. *(2.5 points)* Déterminer ν et σ^2.
2. *(1.5 points)* Calculer $\mathbb{P}(1 < X < 10)$.

Exercice 4 : Dans cet exercice, vous effectuerez les calculs et donnerez les résultats sous forme de fractions irréductibles.
On considère une variable aléatoire continue X dont la densité est $f(x) = \frac{2+x}{8}$ si $-2 \leq x \leq 2$ et $f(x) = 0$ si $x \notin [-2, 2]$.

1. *(1 point)* Justifier que f est bien une densité.
2. *(1.5 points)* Calculer l'espérance de X.
3. *(1.5 points)* Calculer la variance de X.
4. *(1.5 points)* On pose $Z = X + 2$. Quelle est la loi de Z ?

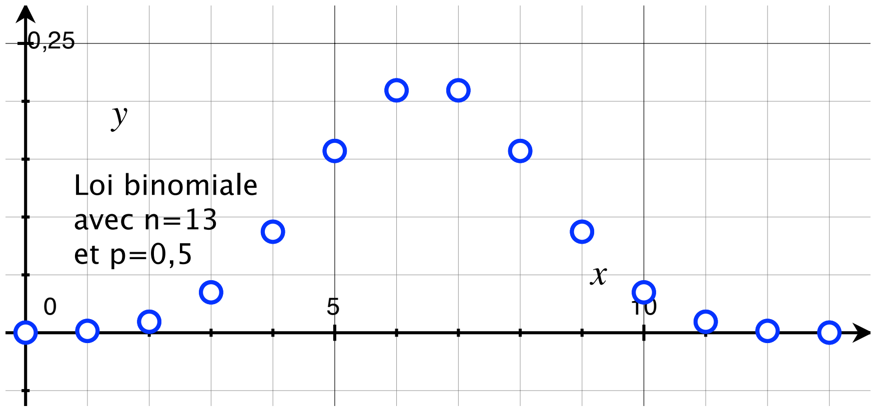
Exercice 5 : Dans cet exercice, vous effectuerez les calculs et donnerez la valeur exacte des résultats.
On suppose que le nombre de boules de glace que Julia va manger est modélisé par une variable aléatoire X. On suppose que Julia ne mange jamais plus de 5 boules de glace en une fois. La loi de X est définie par :

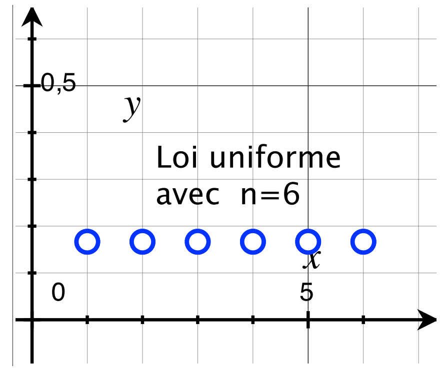
k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	

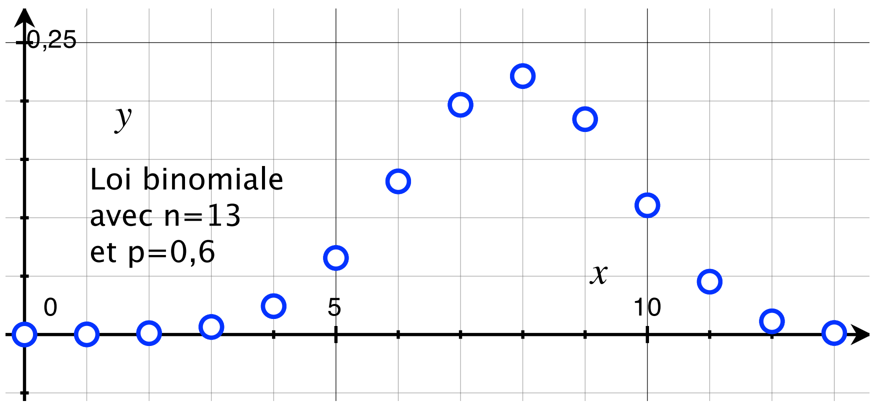
1. *(0.5 point)* Calculer $\mathbb{P}(X = 5)$.
2. *(1 point)* Quelle est la probabilité que Julia mange au moins 2 boules de glace ?
3. *(1.5 points)* Calculer l'espérance de X.
4. *(1.5 points)* Calculer la variance de X.
5. *(2 points)* Julia a un poids trop faible donc maintenant sa mère va lui doubler chaque portion de glace. Soit Y le nombre de boules de glace que la mère de Julia va lui donner. Quelle est l'espérance et la variance de Y ?

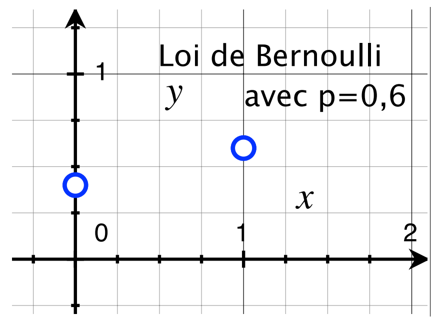
TABLE 1. **Lois discrètes classiques**

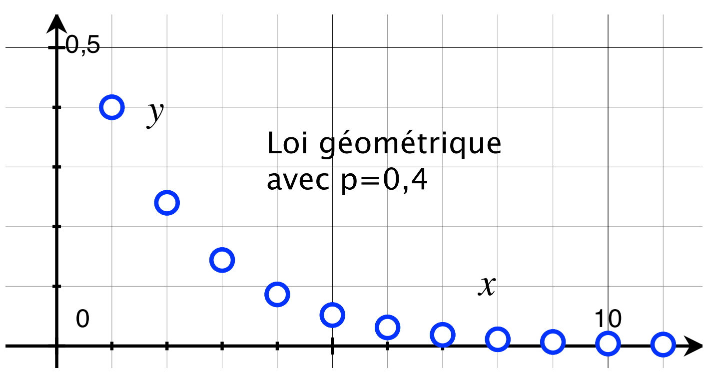
Dénomination	**Loi**	**Espérance**	**Variance**
Loi Uniforme $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$ $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ $\mathbb{P}(X = 1) = p$	$\mathbb{E}(X) = p$	$\mathbb{V}(X) = p(1-p)$
Loi Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$	$\mathbb{V}(X) = np(1-p)$
Loi Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \llbracket 1, +\infty \llbracket$ $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, +\infty \llbracket$ $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$	$\mathbb{V}(X) = \lambda$


0,25
y
Loi binomiale
avec n=13
et p=0,5
x
0
5
10


0,5
y
Loi uniforme
avec n=6
x
0
5


0,25
y
Loi binomiale
avec n=13
et p=0,6
x
0
5
10


1
Loi de Bernoulli
y
avec p=0,6
x
0
1
2


0,5
y
Loi géométrique
avec p=0,4
x
0
10

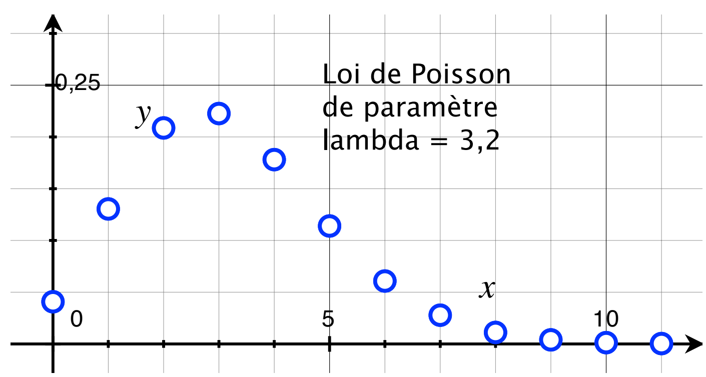
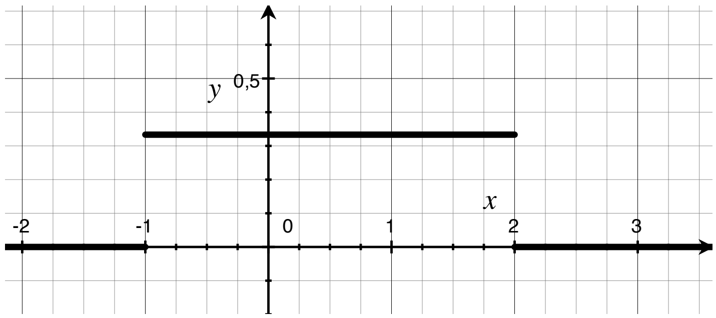
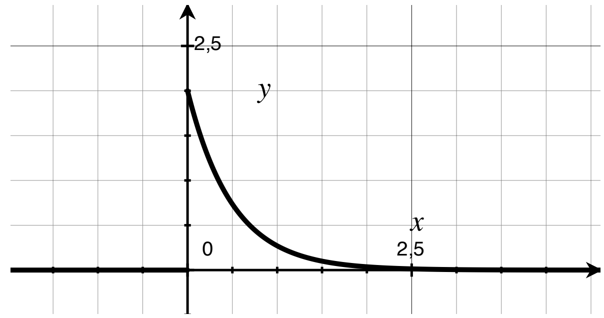

0,25
Loi de Poisson
de paramètre
lambda = 3,2
y
x
0
5
10

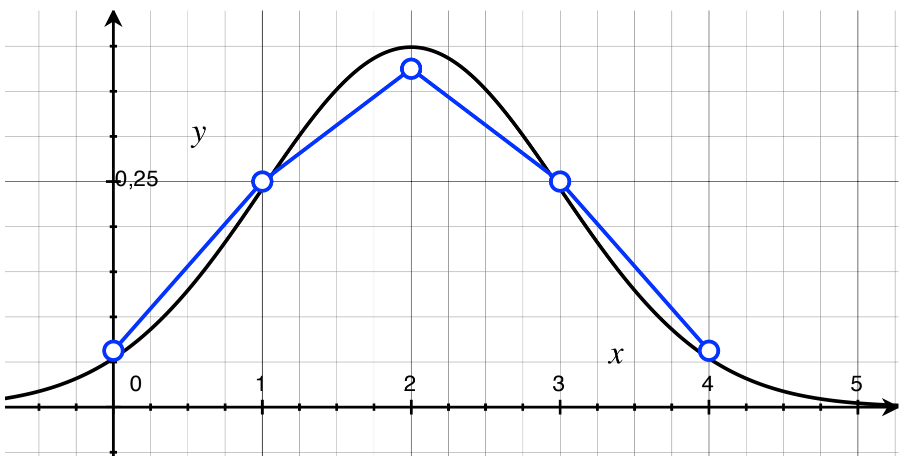
TABLE 2. **Lois discrètes classiques**

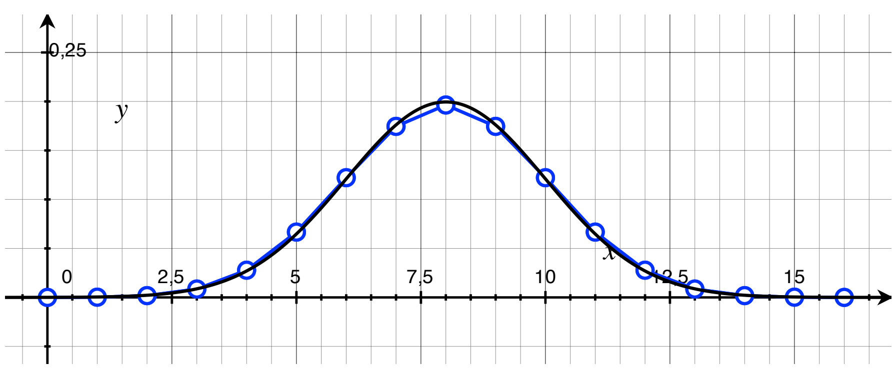
Dénomination	**Densité**	**Espérance**	**Variance**
Loi Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b]$ $f(x) = 0, \quad x \notin [a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0$ $f(x) = 0, \quad x < 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi Normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Loi Log-Normale Paramètres μ, σ	$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$
Loi χ^2 (Chi-deux) Paramètre $k \in \mathbb{N}$	$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \ x \geqslant 0$ où Γ est la “fonction Gamma” $f(x) = 0, \quad x < 0$	k	$2k$
Loi Logistique Paramètres μ, s	$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)/s}}{s\left(1+e^{-(x-\mu)/s}\right)^2}$	μ	$\frac{\pi^2}{3} s^2$





(a) Loi uniforme $\mathcal{U}(-1,2)$. Sa densité est de $\frac{1}{3}$ sur l'intervalle $[-1,2]$ et de 0 en-dehors de cet intervalle. (b) Densité de la loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$





Comparaison de la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$ avec la loi normale de la même espérance et la même variance, pour $n=4$ et $n=16$

$\Phi(t) = P(X \leq t)$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997