Exercice : Continuité et coordonnées polaires.

En utilisant les coordonnées polaires, étudier la continuité des fonctions de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corrigé :

Pour l'étude de ces 3 fonctions, on effectue le changement de variables en polaire. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on pose

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

où $r > 0$ et $\theta \in]-\pi/2, +\pi/2[$.
On a alors :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0, \forall\theta} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \lim_{r\to 0, \forall\theta} r(\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)) = 0$$

donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{r\to 0, \forall\theta} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \lim_{r\to 0, \forall\theta} r^2\ln(r^2) = 0$$

donc g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{r\to 0, \forall\theta} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \lim_{r\to 0, \forall\theta} (\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)) = \cos(2\theta).$$

La valeur de la limite varie selon la direction de θ, donc h n'est pas continue en $(0,0)$.