Exercice 4 : Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$.

Soient deux réels $0 < \varepsilon < M < 1$. Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^M \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx &= \left[\frac{-\ln(1-x^2)}{x}\right]_\varepsilon^M - 2\int_\varepsilon^M \frac{1}{1-x^2}dx \\
&= \frac{-\ln(1-M^2)}{M} + \frac{\ln(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon} - 2\int_\varepsilon^M \left(\frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\right)dx \\
&= \frac{-\ln(1-M^2)}{M} + \frac{\ln(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon} - \ln(1+M) + \ln(1+\varepsilon) + \ln(1-M) - \ln(1-\varepsilon).
\end{aligned}$$

Avec le développement limité en 0 de ln, $\ln(1-\varepsilon^2) \sim_{\varepsilon\to 0} -\varepsilon^2$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^M \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = \frac{-\ln(1-M^2)}{M} - \ln(1+M) + \ln(1-M).$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^M \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ converge. On a alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to 1}\int_0^M \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx &= \lim_{M\to 1}\left(\frac{-\ln(1-M^2)}{M} - \ln(1+M) + \ln(1-M)\right) \\
&= \lim_{M\to 1}\left(\frac{-\ln(1-M)}{M} - \frac{\ln(1+M)}{M} - \ln(1+M) + \ln(1-M)\right) \\
&= -2\ln(2).
\end{aligned}$$

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ converge et vaut $-2\ln(2)$.

Remarque : On peut justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ converge sans calculer l'intégrale. En effet,

➤ $x \mapsto \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ est continue sur $]0,1[$.

➤ On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx + \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$.

➤ Etudions $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$. On a, pour x proche de 0,

$$\frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(-x^2 + o(x^2)\right) = -1 + o(1).$$

On peut donc prolonger la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ par continuité en 0.

➤ Etudions $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$. En effectuant le changement de variable $u = 1-x$, on a :

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-(1-u)^2)}{(1-u)^2}du = \int_0^{1/2} \frac{\ln(2u-u^2)}{(1-u)^2}du = \int_0^{1/2} \frac{\ln(u)+\ln(2-u)}{(1-u)^2}du.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(u)+\ln(2-u)}{(1-u)^2}du$ converge car la fonction $u \mapsto \ln(u)$ est intégrable en 0.

➤ Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ converge.