**Exercice 20 :**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \max(\sin(x), 0)$.

1. Graphe de la fonction : $g$ est une fonction $2\pi$-périodique. Sur $[-\pi; 0]$, $g$ est nulle et sur $[0; \pi]$, $g = \sin$. On remarque que $g \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_m$.
2. Calcul des coefficients de Fourier.
   On peut utiliser les formules de trigonométrie
   $$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \quad \text{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
   pour obtenir
   $$a_n(g) = \frac{(-1)^n + 1}{\pi(n^2-1)}\ \forall n \geq 1 \quad \text{et} \quad a_1(g) = 0;$$
   $$b_n(g) = 0\ \forall n \geq 1 \quad \text{et} \quad b_1(g) = 1/2.$$
   Pour le calcul de $a_n(g)$, on peut aussi faire le calcul suivant qui est plus astucieux et plus rapide. Il repose sur deux intégrations par parties :
   $$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(nt)dt = \frac{-1}{n\pi}\int_0^\pi \cos(t)\sin(nt)dt = \frac{-1}{n\pi}\left(\frac{1}{n}[(-1)^n + 1] - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(t)\cos(nt)dt\right) \\ &= \frac{-1}{n^2\pi}[(-1)^n + 1] + \frac{1}{n^2}a_n(g) \quad \text{ et on en déduit directement } a_n(g) \text{ pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$
   Comme $g \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_m$, $g$ est égale à sa série de Fourier :
   $$g(t) = \frac{1}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(4n^2-1)}\cos(2nt) + \frac{1}{2}\sin(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$
3. Calculs de sommes.
   On applique la formule ci-dessus en $x = 0$ :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$
   On applique la formule ci-dessus en $x = \pi/2$ :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{-\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$
4. On définit $f$ par $f(x) = |\sin(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Il suffit de remarquer que $f(x) = g(x) + g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   On en déduit donc que $a_n(f) = 2a_n(g)$ et $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 21 :**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de période $T$. Alors $f$ est égale à sa série de Fourier. On pose $\omega = 2\pi/T$. De plus, comme $f'$ est continue, on a par intégration par parties :
$$a_n(f') = \frac{2}{T}\int_0^T f'(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\left(\underbrace{[f(t)\cos(n\omega t)]_0^T}_{=0 \text{ par } T-\text{périodicité}} + n\omega\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt\right)$$
Donc $a_n(f') = n\omega b_n(f)$.
Un calcul similaire donne $b_n(f') = -n\omega a_n(f)$.

**Exercice 22 :**

Soit $\varphi(z) = \dfrac{1}{2-z}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\varphi(e^{ix}) = \frac{2-e^{-ix}}{5-4\cos(x)} \quad \text{donc} \quad Re(\varphi(e^{ix})) = \frac{2-\cos(x)}{5-4\cos(x)}.$$

2. On a
$$\varphi(z) = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-z/2} = \frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{pour tout } z \text{ tel que } |z/2| < 1.$$
Donc :
$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{et } R = 2.$$

3. $f$ est une fonction continue, $\mathcal{C}^1_m$ et $2\pi$-périodique. Donc $f$ est égale à sa série de Fourier et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par continuité de l'application $Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ :
$$f(x) = Re(\varphi(e^{ix})) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cos(nx).$$

4. D'après le développement en série de Fourier de $f$, on voit que $a_0(f) = 1$, c'est-à-dire
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 1 \quad \text{donc} \quad I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi.$$
De plus, d'après la formule de Parseval,
$$J = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n+3}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}.$$
Donc
$$J = \frac{7}{24}.$$