Exercice 7 :
Nous allons résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot)$ existe et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Posons $u(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
On commence par résoudre

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $u(x,y) = h(y)$. On résout maintenant :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h(y).$$

Or on sait que

$$f(x,y) = f(x,0) + \int_0^y h(u)du.$$

Il existe donc $k, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que

$$f(x,y) = g(x) + k(y).$$

Réciproquement, une telle fonction convient.

Exercice 9 :

1. Fait en TD.
2. Fait en TD.
3. Fait en TD.
4. Pour $a = 1$ et $b = -1$, on obtient
$$4\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(u,v) = 0$$
donc d'après l'exercice 7, il existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que
$$F(u,v) = h(u) + g(v).$$
On en déduit que
$$f(x,y) = h(x+y) + g(x-y).$$
Réciproquement, une telle fonction convient.
5. Pour $a = 0$ et $b = 1$, on a :
$$(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}) + (-2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}) + (\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}) = 0.$$
On résout donc
$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v) = 0.$$
D'après l'exercice 7, il existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que
$$F(u,v) = h(v)u + g(v).$$
On en déduit que
$$f(x,y) = h(x+y)x + g(x+y).$$

Exercice 10 :
Etudions les extremas locaux de $f(x,y) = (2x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ sur $\mathbb{R}^2$.
On commence par déterminer les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(4x - 2x(2x^2+3y^2)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(6y - 2y(2x^2+3y^2)).$$

L'ensemble des solutions de $\nabla f(x,y) = 0$ (ie l'ensemble des points critiques) est alors :

$$\{(0,0);(0,-1);(0,1);(1,0);(-1,0)\}.$$

On étudie maintenant les matrices hessiennes en les points critiques.
On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}xy(-20+8x^2+12y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(4-20x^2+8x^4+12x^2y^2-6y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(6-4x^2+12y^4+8x^2y^2-30y^2).$$

La matrice hessienne de f nous permet de déterminer la nature de chaque point critique. On a :

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad H_{(0,1)} = e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad H_{(1,0)} = H_{(-1,0)} = e^{-1}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Enfin,
$det(H_{(0,0)}) > 0$ et $tr(H_{(0,0)}) > 0$ donc $(0,0)$ est un minimum local ;
$det(H_{(0,1)}) > 0$ et $tr(H_{(0,1)}) < 0$ donc $(0,1)$ est un maximum local.
$det(H_{(1,0)}) < 0$ donc $(1,0)$ et $(-1,0)$ ne sont pas des extremums locaux.

Exercice 12 :

1. La fonction $f(x,y) = x^3+y^3-xy-1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a :

$$f(1,1) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage I de 1 et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que pour tout $x \in I$, $y = \varphi(x)$ et $\varphi(1) = 1$. Pour déterminer les dérivées $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$, on dérive successivement la relation $f(x,\varphi(x)) = 0$ par rapport à la variable x. On obtient, pour tout $x \in I$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{et on trouve} \quad \varphi'(1) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1,\varphi(1))}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,\varphi(1))} = -1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \varphi''(x)\frac{\partial f}{\partial y} + \varphi'(x)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{et on trouve } \varphi''(1) = -7.$$

On va maintenant donner l'allure de Γ au voisinage de $(1,1)$. D'après la formule de Taylor, on a :

$$\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + \frac{\varphi''(1)}{2}(x-1)^2 + o(x^2).$$

$$\varphi(x) = 2 - x + \frac{-7}{2}(x-1)^2 + o(x^2).$$

On en déduit l'équation de la tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 1$:

$$y = 2 - x,$$

et la position relative de la courbe représentative de la fonction φ par rapport à sa tangente au voisinage de 1. En effet, comme

$$\varphi(x) - (2 - x) = \frac{-7}{2}(x-1)^2 + o(x^2) < 0,$$

on en déduit que la courbe représentative de φ est en dessous de sa tangente dans un voisinage de 1.

2. Remarque : on peut pousser le calcul plus loin pour déterminer la dérivée $\varphi'''(a)$:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \varphi'(x)\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} + \varphi''(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \varphi'(x)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \varphi'(x)\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\right) + \varphi'''(x)\frac{\partial f}{\partial y} + \varphi''(x)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$+\varphi''(x)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \varphi'(x)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \varphi'(x)\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} + \varphi''(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \varphi'(x)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \varphi'(x)\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)\right).$$

Cela nécessite beaucoup de calculs (surtout qu'il faudra calculer toutes les dérivées partielles !)... Pour cette exercice, on va déterminer les dérivées de φ beaucoup plus rapidement et plus simplement. Il faudra privilégier cette approche dans les exercices. Je vous conseille de reprendre les calculs de la question précédente de cette manière.

On note $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad xy - \sin(y) + x = 0\}$.
On veut démontrer l'existence d'une fonction φ tel que $\varphi(0) = 0$. On va donc appliquer le théorème des fonctions implicites en $(0, 0)$.
La fonction $f(x, y) = xy - \sin(y) + x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f(0, 0) = 0$. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \cos(y) \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1 \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage I contenant 0 et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que pour tout $x \in I$, $y = \varphi(x)$ et $\varphi(0) = 0$.
On cherche à présent le développement limité de φ en 0. D'après la formule de Taylor-Young, on a, pour $x \in I$,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{6}x^3 + o(x^3).$$

Pour calculer les dérivées de φ en 0, on utilise la relation suivante ; pour tout $x \in I$, on a $f(x, \varphi(x)) = 0$. On dérive alors $x\varphi(x) - \sin(\varphi(x)) + x = 0$ par rapport à x :

$$\varphi(x) + x\varphi'(x) - \varphi'(x)\cos(\varphi(x)) + 1 = 0. \quad (*)$$

Comme $\varphi(0) = 0$ (d'après le théorème des fonctions implicites), on trouve :

$$\varphi'(0) = 1.$$

On dérive une nouvelle fois par rapport à x l'égalité (*) :

$$2\varphi'(x) + x\varphi''(x) - \varphi''(x)\cos(\varphi(x)) + \varphi'(x)^2\sin(\varphi(x)) = 0 \quad \text{et on trouve} \quad \varphi''(0) = 2.$$

On dérive une dernière fois :

$$3\varphi''(x) + x\varphi'''(x) - \varphi'''(x)\cos(\varphi(x)) + \varphi''(x)\varphi'(x)\sin(\varphi(x)) + 2\varphi''(x)\varphi'(x)\sin(\varphi(x)) + \varphi'(x)^3\cos(\varphi'(x)) = 0$$

et on trouve $\varphi'''(0) = 6 + \cos(1)$.

Exercice 13 :

1.
2.
3. Comme $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 4x^2+y^2=4\}$ est compact et f est continue sur $\mathbb{R}^2$, f admet un maximum et un minimum global sur C. De plus, la contrainte $(x,y) \mapsto 4x^2+y^2-4$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème des extrema-liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$(y,x)+\lambda(8x,2y)=0.$$
On résout ce système :
pour $\lambda = \frac{1}{4}$, on trouve $(x,y) \in \{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)\}$; et pour $\lambda = \frac{-1}{4}$, on trouve $(x,y) \in \{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)\}$.
Conclusion :
$$\min_{(x,y)\in C} f(x,y) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = -1;$$
$$\max_{(x,y)\in C} f(x,y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = 1.$$

Exercice 15 :
On note x le rayon de la boîte cylindrique et y sa hauteur.
Le volume de la boîte est :
$$V = \pi x^2 y.$$
On appelle e l'épaisseur de la boîte. C'est une quantité connue. La contrainte s'écrit alors :
$$2\pi x^2 \times 2e + 2\pi xye = \alpha.$$
$$4\pi x^2 \times +2\pi xy = \alpha' \qquad \text{où } \alpha' = \alpha/e.$$
On cherche donc à maximiser $f(x,y) = \pi x^2 y$ sous la contrainte $g(x,y) = 4\pi x^2 \times +2\pi xy - \alpha' = 0$. Le théorème des extrema liés donne l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\begin{cases} 4\pi x^2 + 2\pi xy = \alpha' \\ 2\pi xy + \lambda(8\pi x + 2\pi y) = 0 \\ \pi x^2 + \lambda 2\pi x = 0 \end{cases}$$
d'où (x étant non nul)
$$\begin{cases} 2x^2 + xy = \alpha'/(2\pi) \\ xy + 4\lambda x + \lambda y = 0 \\ x + 2\lambda = 0 \end{cases}$$
On trouve $\lambda = -x/2$. On résout alors :
$$\begin{cases} 2x^2 + xy = \alpha'/(2\pi) \\ xy/2 - 2x^2 = 0 \end{cases}$$
En multipliant par 2 la deuxième équation, on trouve (car $x \geq 0$) :
$$x^2 = \frac{\alpha'}{12\pi} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\sqrt{\alpha'}}{2\sqrt{3\pi}}.$$
On en déduit alors
$$y = \sqrt{\frac{\alpha'}{\pi}}\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Exercice 16 :

Rappels de cours : Théorème des extrema liés et Lagrangien - Optimisation sous contrainte.

But : Optimiser $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sous la contrainte* $g(x, y) = 0$.
On dispose du théorème suivant :

1. Théorème des extrema liés.
Soient f, g *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. *Si* f *admet en* (x_0, y_0) *un extremum lié sous la contrainte* $g(x, y) = 0$ *et si* $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ *alors il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

2. Une alternative de rédaction : utiliser le Lagrangien.
Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, on définit le Lagrangien par

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \qquad \text{où } \lambda \text{ est un réel inconnu.}$$

Pour que $\mathcal{L}$ *ait un extremum, il faut que le gradient de* $\mathcal{L}$ *soit nul. On cherche donc les points critiques* $\{(x_0, y_0, \lambda_0)\}$ *du Lagrangien. A ce stade, on peut dire que* (x_0, y_0) *est un point critique de* f *sous la contrainte* g. *Il reste cependant à déterminer la nature du point critique (maximum local, minimum local...). Pour cela, on calcule pour chaque point critique :*

$$\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) \times \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0)\right)^2.$$

➤ *Si* $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ *et si* $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ *et* $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ *alors* (x_0, y_0) *est un minimum local.*
➤ *Si* $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ *et si* $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ *et* $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ *alors* (x_0, y_0) *est un maximum local.*
➤ *Si* $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) \leq 0$, *on ne peut pas conclure. (Attention ! On ne peut pas dire que* (x_0, y_0) *n'est pas un extremum si* $\Delta < 0$ *contrairement à l'étude de la Hessienne dans l'exercice 10 !).*

Remarque : Etudier la nature des points critiques dans ce contexte peut être difficile et elle sera admise dans certains exercices (ex 16-17 par exemple).

Vocabulaire : λ *est appelé multiplicateur de Lagrange.*

On détermine le périmètre du conduit,

$$P = x(1 + \frac{\pi}{2}) + 2y$$

et l'aire du conduit :

$$A = xy + \frac{\pi}{8}x^2.$$

On cherche donc à minimiser

$$f(x, y) = x(1 + \frac{\pi}{2}) + 2y,$$

sous la contrainte

$$g(x, y) = c - xy - \frac{\pi}{8}x^2 = 0.$$

On a $\nabla g(x, y) = (-y - \frac{\pi}{4}x, -x) = (0, 0)$ ssi $(x, y) = (0, 0)$ et $(0, 0)$ ne vérifie pas la contrainte donc on peut appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange (théorème des extrema liés ou Lagrangien).
Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x(1 + \frac{\pi}{2}) + 2y - \lambda(c - xy - \frac{\pi}{8}x^2).$$

On cherche les points critiques de $\mathcal{L}$. On a :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 1 + \frac{\pi}{2} + \lambda y + \lambda \frac{\pi}{4}x, \qquad (*)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 2 + \lambda x, \qquad (**)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = xy + \frac{\pi}{8}x^2 - c. \qquad (***)$$

On résout le système $\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$. On en déduit que

$$\lambda x = -2, \qquad \text{avec } (**)$$

et

$$\lambda y = -1 \qquad \text{avec } (*)$$

Comme $\lambda \neq 0$ (d'après $(*)$, on obtient avec $(***)$:

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{4+\pi}{2c}}.$$

Enfin, comme x, y sont des quantités positives, on trouve pour unique point critique :

$$(x,y,\lambda) = \left(2\sqrt{\frac{2c}{4+\pi}}, \sqrt{\frac{2c}{4+\pi}}, -\sqrt{\frac{4+\pi}{2c}}\right).$$

Conclusion : $(x,y) = \left(\frac{4}{4+\pi}c, \frac{2}{4+\pi}c\right)$ est un extremum de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$. Il resterait à montrer que cet extremum est bien un minimum ce qui est admis ici.

Exercice 17 :
La première étape est de faire un dessin (cf ci-dessous) !
On introduit $x > 0, y > 0$ et $R > 0$ comme sur le dessin. On rappelle que R est fixé.
Il s'agit à présent de transcrire l'énoncé en un problème d'optimisation sous contrainte. Trouver la fonction à optimiser n'est pas difficile : il s'agit de trouver le volume maximal du cylindre donc de maximiser la fonction $f(x,y) = 2\pi y^2 x$. La contrainte que le cylindre soit inscrit dans la sphère va définir notre contrainte. On voit sur le dessin que cette condition impose que $x^2 + y^2 = R^2$ (équation d'un cercle). La fonction de contrainte est donc $g(x,y) = R^2 - x^2 - y^2 = 0$.
On a $\nabla g(x,y) = (-2x, -2y) = (0,0)$ ssi $(x,y) = (0,0)$ et $(0,0)$ ne vérifie pas la contrainte donc on peut appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange (théorème des extrema liés ou Lagrangien).
Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

On cherche les points critiques de $\mathcal{L}$. On a :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2\pi y^2 + 2x\lambda,$$

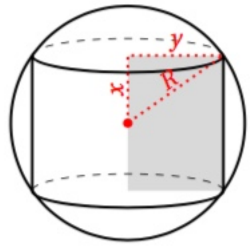
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 4\pi xy + 2y\lambda,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - R^2.$$

On résout le système $\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$ et on obtient pour unique solution le point critique

$$(x,y,\lambda) = \left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}R, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}R\right).$$

Conclusion : $(x,y) = \left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}R\right)$ est un extremum de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$. Il resterait à montrer que cet extremum est bien un maximum ce qui est admis ici.


y
x
R