DEVOIR SURVEILLÉ de Novembre 2016 — ANALYSE 3 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique interdits.

Exercice 1. Nature des intégrales et séries ci-dessous. "CV" : converge, "DV" : diverge. *Cocher une case à tort sera pénalisé.*

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$	☐ CV	☐ DV
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-1/n}$	☐ CV	☐ DV
$\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$	☐ CV	☐ DV
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\pi/2}}$	☐ CV	☐ DV
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$	☐ CV	☐ DV
$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x\ln x}dx$	☐ CV	☐ DV

Exercice 2. Développer en série entière $\dfrac{1}{4-x}$ en précisant le rayon de convergence.

Exercice 3. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx$

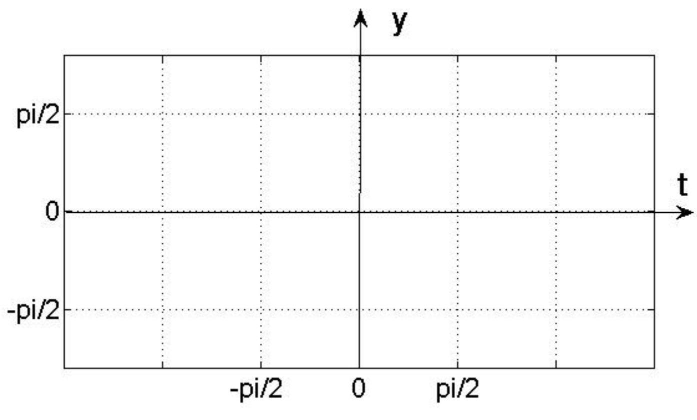
Exercice 4. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.

Sur $]-R, R[$, calculer $f''(x) - 2xf'(x) - 3f(x)$ en fonction de $f(x)$.

Exercice 5. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} xdx$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx$, $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx$ pour $n \geq 1$.

Soit f la fonction 2π périodique définie par $f(x) = \begin{cases} ax \text{ si } -\pi < x < 0, \\ bx \text{ si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Tracer le graphe de f pour $a = -1/2$ et $b = 1$.



Cas général. Déterminer les coefficients de Fourier de f en fonction de a, b, u_n et v_n.

Exercice 6. Soit (d_n) une suite d'entiers entre 0 et 9. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ converge.

Ecrire alors $a := 7,77\ldots7\ldots$ sous la forme d'une série et montrer que a est rationnel.