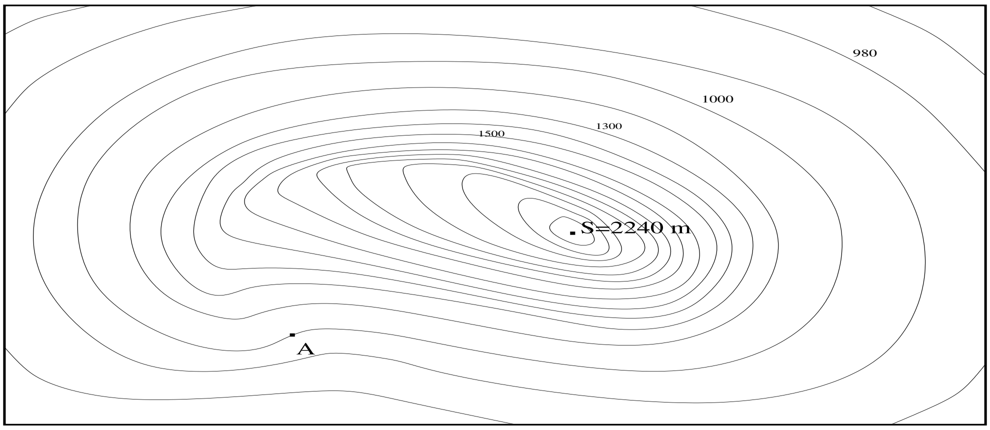
DEVOIR SURVEILLÉ de janvier 2017 — ANALYSE 3 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.

Exercice 1. Soit $\psi(t) = f(3t, t^2 + 1)$ où f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\psi'(t)$ et $\psi''(t)$ en fonction des dérivées partielles de f et donner le développement limité à l'ordre 2 de $\psi(t)$ en 0 en fonction de f et ses dérivées partielles en $(0, 1)$. *Écrire uniquement les résultats.*

Exercice 2. Dessiner sur la carte le chemin suivant la ligne de plus grande pente pour aller du point A au sommet S. Écrire l'équation du plan tangent au relief au point S.



Exercice 3. Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} + y & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Justifier que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

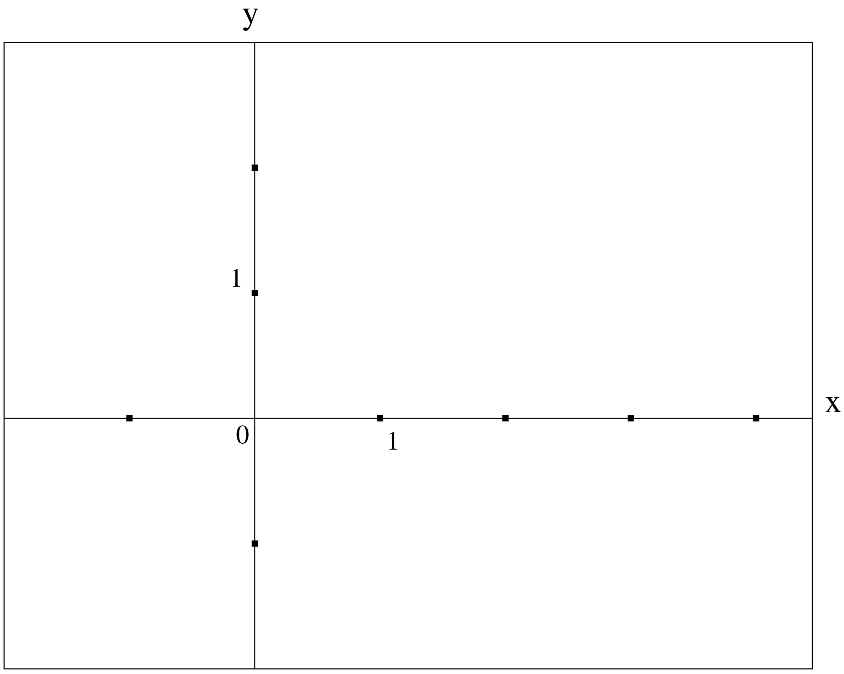
Démontrer que f est continue en $(0,0)$.

Calculer, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *(ne donner que les résultats).*

La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ? *(justifier)*

Exercice 4. Soit $h(x,y) = \sin y + y + e^x - 1$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$. Montrer qu'il existe une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) = 0$ et, au voisinage de $(0,0)$, $h(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. *Soyez précis dans la vérification des hypothèses du théorème utilisé.* Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 0.

Exercice 5. Extrema de $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $h(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.
Dessiner l'allure des lignes de niveaux de f et h (avec deux couleurs différentes).



Écrire le Lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ du problème.
Écrire le système des conditions nécessaires d'optimalité.
Trouver les 4 solutions (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$ du système et les représenter sur le dessin.
[Indications: trouver une solution évidente pour $\lambda = 0$. Ensuite soustraire les 2 premières équations et distinguer les cas $x = y$ et $x \neq y$.]
Calculer $\max\{f(x, y)$ sous la contrainte $h(x, y) = 0\}$ et $\min\{f(x, y)$ sous la contrainte $h(x, y) = 0\}$.