

# Examen

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les exercices sont indépendants. Le sujet comporte 1 page.

## Exercice 1 :

Soit  $X$  une variable aléatoire dont la loi est donnée par  $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$  et  $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$ .

- [2 pts] Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\text{Var}(X)$ .
- [1,5 pts] Calculer la probabilité que  $X$  soit positif.

## Exercice 2 :

Soit  $Y$  une variable aléatoire telle que  $\mathbb{E}(Y) = 2$  et  $\text{Var}(3Y - 1) = 27$ .

- [1 pt] Calculer  $\text{Var}(Y)$ .
- [1,5 pts] Calculer  $\mathbb{E}[(Y - 3)^2]$ .

## Exercice 3 : Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

On plante 100 tulipes dans un jardin. La probabilité qu'une tulipe fleurisse est de  $\frac{4}{5}$ , indépendamment des autres tulipes. On note  $S$  la variable aléatoire qui modélise le nombre de tulipes qui ont fleuri.

- (a) [1,5 pts] Quelle est la loi de  $S$ ? Justifier la réponse.  
(b) [1 pt] Donner l'espérance et la variance de  $S$ .
- (a) [1,5 pts] Soit  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . À l'aide d'un théorème du cours, approximer la probabilité suivante avec une intégrale :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S - 80}{4} \in [a, b]\right).$$

- (b) [2 pts] En déduire une approximation de la probabilité d'avoir au moins 84 fleurs.

On s'aidera d'une des valeurs de la table suivante; si on note  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , on a :  $\Phi(0) = 0,50$ ;  $\Phi(0,1) = 0,54$ ;  $\Phi(0,84) = 0,80$ ;  $\Phi(1) = 0,84$  et  $\Phi(1,6) = 0,95$ .

## Exercice 4 : [1,5 pts]

Une variable aléatoire possède la densité de probabilité  $g(x) = \begin{cases} cxe^{-x} & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Déterminer la valeur de  $c$ .

## Exercice 5 :

On note  $X$  la variable aléatoire qui possède la densité de probabilité suivante

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+1) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- [3 pts] Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .
- [1,5 pts] Quelle est la probabilité que  $X$  soit comprise entre 0,5 et 2?

## Exercice 6 :

Une étude nationale sur les activités extra-scolaires des élèves a montré que :

- la probabilité qu'un élève fasse de la musique est  $\frac{1}{3}$  ;
- la probabilité qu'un élève fasse du sport est  $\frac{3}{5}$ .

On suppose que le fait de jouer de la musique est indépendant de la pratique sportive.

- [1,5 pts] Quelle est la probabilité qu'un élève fasse du sport et de la musique?
- [1,5 pts] Quelle est la probabilité qu'un élève pratique au moins une de ces 2 activités extra-scolaires?