

(Calculatrices et documents interdits; durée : 1 heure)

Attention toute réponse devra être précisément justifiée.

Exercice 1 (2 points)

Voici les notes des élèves à un examen de statistique : 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 13 ; 15 ; 17 ; 18 ; 20.

Dessiner le diagramme de boîte à moustache de cette série statistique.

Exercice 2

Nous avons interrogé 100 couples et l'on veut savoir s'il y a un lien entre la durée de sommeil et le nombre d'enfants.

Nous souhaitons exprimer le nombre y d'heures de sommeil au cours d'une nuit en fonction du nombre x d'enfants d'un couple. Les résultats suivant sont disponibles :

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 180 \text{ et } \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 424, \sum_{i=1}^{100} y_i = 600 \text{ et } \sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 6100 \text{ et } \sum_{i=1}^{100} y_i x_i = 1480.$$

Pour cet exercice, on attend une réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

- (1.5 points) Quelle est la moyenne des $((x_i)_{1 \leq i \leq 100})$? Quelle est la variance des $((y_i)_{1 \leq i \leq 100})$? Quelle est la covariance des $((x_i)_{1 \leq i \leq 100})$ et des $((y_i)_{1 \leq i \leq 100})$?
- (2 points) Après avoir donné les formules théoriques permettant de calculer l'équation de la droite de régression de y sur x , appliquez-les aux données de l'énoncé.
- (1 point) Donner les formules théoriques pour le coefficient de corrélation et pour le coefficient de détermination.

Exercice 3

Soit $\theta > 0$. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. La variable aléatoire X_1 est continue et a pour densité,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (2 points) Quelle est l'espérance de X_1 ?
- (2 points) Quelle est la variance de X_1 ?
- (1 point) Donner un estimateur $\hat{\theta}$ pour θ .
- (1 point) Est ce que $\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais de θ ?

Exercice 4

On veut savoir quelle proportion de la population française a peur des mathématiques. On effectue un sondage aléatoire dans la population française dans le but d'estimer la proportion p de personnes qui ont peur des mathématiques. On interroge 500 personnes prises au hasard dans la population. On appelle X_i la variable aléatoire définie par $X_i = 1$ si la i ème personne interrogée a peur des maths, $X_i = 0$ sinon.

- (1 point) Quelle est la loi suivie par le nombre de personnes qui a peur des mathématiques dans un tel échantillon de 500 personnes ? On considère que le sondage est fait avec remise.
- (1 point) Énoncer le théorème limite central (pour une suite de variables de même loi que les X_i).
- (2.5 points) Sur 500 personnes interrogées, 50 disent avoir peur des maths. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un intervalle de confiance au niveau 0,95 pour la proportion p . (On pourra penser que comme $0 \leq p \leq 1$, on peut majorer $p(1-p)$ par $1/4$). Une réponse numérique à 10^{-3} près est attendue.
- (3 points) Sur 500 personnes interrogées, 50 disent avoir peur des maths. En utilisant l'approximation fournie par le théorème limite central et le lemme de Slutsky (et la table jointe à l'énoncé) donner un intervalle de confiance au niveau 0,95 pour la proportion p . On pourra utiliser que $\sqrt{0.9/500} = 0.13$ à 10^{-3} près. Une réponse numérique à 10^{-3} près est attendue.

Table 3**Loi Normale Centrée Réduite**Fonction de répartition $F(z)=P(Z<z)$ Exemple : $P(Z<1.96)= 0.97500$ se trouve en ligne 1.9 et colonne 0.06

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0,0 | 0,50000 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,52790 | 0,53188 | 0,53586 |
| 0,1 | 0,53983 | 0,54380 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56750 | 0,57142 | 0,57535 |
| 0,2 | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59484 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| 0,3 | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| 0,4 | 0,65542 | 0,65910 | 0,66276 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67365 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68793 |
| 0,5 | 0,69146 | 0,69498 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,72241 |
| 0,6 | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| 0,7 | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76731 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78231 | 0,78524 |
| 0,8 | 0,78815 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| 0,9 | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82382 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| 1,0 | 0,84135 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84850 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| 1,1 | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88298 |
| 1,2 | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90148 |
| 1,3 | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,4 | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92786 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| 1,5 | 0,93319 | 0,93448 | 0,93575 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,6 | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| 1,7 | 0,95544 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95819 | 0,95907 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| 1,8 | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| 1,9 | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97670 |
| 2,0 | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97933 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| 2,1 | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| 2,2 | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98899 |
| 2,3 | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,99010 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| 2,4 | 0,99180 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| 2,5 | 0,99379 | 0,99396 | 0,99413 | 0,99430 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,99520 |
| 2,6 | 0,99534 | 0,99547 | 0,99560 | 0,99573 | 0,99585 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| 2,7 | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,99720 | 0,99728 | 0,99736 |
| 2,8 | 0,99744 | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99801 | 0,99807 |
| 2,9 | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |
| 3,0 | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99897 | 0,99900 |
| 3,1 | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 |
| 3,2 | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 |
| 3,3 | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 |
| 3,4 | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 |