INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2017/18
2ème année **Analyse 3**
Liste 2: Séries numériques

Exercice 6 Étudier la convergence des séries suivantes dont on donne le terme général :

1.	$\dfrac{\ln n}{2^n}$,	2.	$\dfrac{4n^2-n+5}{3n^5+2}$,	3.	$\dfrac{1}{n^2\ln^2 n}$,	4.	$\dfrac{1}{\ln^2 n}$,
5.	$n\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)$,	6.	$\frac{n!}{(2n)!}$,	7.	$\frac{1}{n\cos^2 n}$,	8.	$2^{-\sqrt{n}}$,
9.	$\dfrac{(-1)^n\sin n}{n^2}$,	10.	$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2\ln^2 n}$,	11.	$\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$,	12.	$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$.

Exercice 7 Étudier la convergence des séries en fonction des paramètres

1. $a \geq 0$, $u_n = na^n$,
2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n = n^\alpha \tan\frac{1}{n}$.
3. $a, b \geq 0$, $u_n = \frac{a^n}{n+b^n}$.
4. α, β réels, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, série de Bertrand. *On peut étudier d'abord le cas $\alpha = 1+\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ en comparant u_n à $v_n = \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}$ pour n assez grand, puis $\alpha = 1-\varepsilon$ avec une technique similaire , enfin $\alpha = 1$, en utilisant une comparaison série-intégrale.*

Exercice 8 Démontrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ *(Décomposer en éléments simples la fraction* $\dfrac{2}{x(x+1)(x+2)}$*).*
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

Exercice 9 On définit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $w_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n}$,
2. Etudier la nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$. *Pour les deux dernières, on pourra commencer par l'étude de $\sum v_n - u_n$ et $\sum w_n - u_n$.*

Exercice 10 On définit $r_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, reste de la série convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. En encadrant r_n par des intégrales de la fonction f définie par $f(x) = 1/x^2$, montrer que la suite (nr_n) converge vers 1.
2. Après avoir remarqué et justifié que $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, montrer que $s_n = r_n - 1/n$ est équivalent à $1/(2n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. *On pourra encadrer s_n par les intégrales d'une fonction bien choisie.*
3. Déterminer a réel tel que $t_n = r_n - 1/n - 1/(2n^2)$ est équivalent à a/n^3 en $+\infty$.