INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2017/18
2ème année **Analyse 3**
Liste 3 : Séries entières

Exercice 11 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n2^n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{\sin n + \sqrt{n}} z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} z^n \text{ où } k \in \mathbb{N}^*,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^{3n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \text{ où } c_n = \begin{cases} 2^n \text{ si } n \text{ pair} \\ 1/2^n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exercice 12 Si $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(-4)^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n 6^n$ diverge quelles sont les natures des séries numériques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n 2^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 4^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(-6)^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 8^n.$$

Exercice 13 Déterminer les développements en série entière des fonctions suivantes

$$\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{2+x}, \quad \frac{1}{2+3x}, \quad \ln(5+x),$$

puis

$$\frac{1}{(1-x)^2}, \quad \frac{1}{(2+3x)^2}, \quad \frac{1}{x^3-3x+2}, \quad \frac{x^3}{(x-2)^2}, \quad \arctan x.$$

Exercice 14 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n}.$$

Exercice 15 Domaine de convergence et somme des séries entières de variable réelle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n.$$

Exercice 16 Déterminer une solution développable en série entière de l'EDO $y'' + xy' + y = 0$ qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Même question avec une solution de $xy'' + y' + y = 0$ vérifiant $y(0) = 1$.

Pour aller plus loin...

Exercice 17 On considère l'équation : $(E) \,:\, x^2(x-1)y''(x) + x(x+1)y'(x) - y(x) = 0$.

1. Déterminer une solution de (E) développable en série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en précisant le rayon de convergence R.
2. Peut-on prolonger f en dehors de $[-R, R]$ en une solution de (E).
3. Déterminer une autre solution de (E) sous la forme $g(x) = f(x)\varphi(x)$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) (espace vectoriel de dimension 2).

Exercice 18 Soit $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n$.

1. Montrer que (f_n) est la suite de Fibonacci (Merci de consulter la littérature ou Internet...).
2. Décomposer f en éléments simples et trouver une nouvelle expression de f_n.