Année universitaire 2017/18
2ème année **Analyse 3**
Liste 4: Séries de Fourier

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Exercice 19 Dans chacun des cas suivants, tracer la fonction, qui est supposée T périodique, et donner son développement en série de Fourier (on précisera les points où f est égale à sa série de Fourier).

1. $T = 2\pi, \;\; f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } t \in]0, \pi[\end{cases}$; en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2. $T = 2\pi, \;\; f(t) = t$ si $t \in [-\pi, \pi[$.

3. $T = 2\pi, \;\; f(t) = |t|$ si $t \in]-\pi, \pi[$; en déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

4. $T = 2\pi, \;\; f(t) = t^2$ si $t \in [-\pi, \pi[$; en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

5. $T = 1, \;\; f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-1/2, 0[\\ t & \text{si } t \in [0, 1/2] \end{cases}$.

6. $T = 5, \;\; f(t) = 4t$ pour $0 \leq t < 5$; en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 20 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \max(\sin x, 0)$.

1. Représenter le graphe de la fonction.

2. Déterminer ses coefficients de Fourier et étudier la convergence de la série de Fourier.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$, et $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}$.

4. Déterminer le développement en série de Fourier de f où $f(x) = |\sin x|$.

Exercice 21 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de période $T > 0$. Comparer les coefficients de Fourier de f et ceux de f'.

Exercice 22 (DS novembre 2014) Soit $\varphi(z) = \dfrac{1}{2-z}$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer la partie réelle de $\varphi(e^{ix})$.

2. Déterminer le développement en série entière de $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, en précisant le rayon de convergence.

3. En déduire, par identification, le développement en série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2-\cos x}{5-4\cos x}$.

4. En déduire sans calcul $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2-\cos x}{5-4\cos x}\,dx$, avec peu de calculs, $J = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2-\cos x}{5-4\cos x}\right)^2 dx$.