INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2017/18
2ème année **Analyse 3**
Liste 5: Fonctions à plusieurs variables

Lignes de niveaux, continuité

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D, le dessiner dans $\mathbb{R}^2$, vérifier si la fonction est continue sur son ensemble de définition et tracer l'allure des ensembles de niveaux $f(x, y) = c$ pour les valeurs de c indiquées.

1. $f(x, y) = y^2, \quad c = -1, 0, 1, 4.$
2. $f(x, y) = \frac{1}{2}x + y, \quad c = -2, -1, 0, 1, 2.$
3. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1), \quad c = -100, 0, 2.$
4. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}, \quad c = -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2.$

Exercice 2

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et (x_0, y_0) donné. On suppose que les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ sont continues en x_0 et y_0. Cela implique-t-il que f est continue en (x_0, y_0) ?
2. Étudier, en utilisant la **définition**, la continuité en $(0, 0)$ de

$$f(x,y) = |1 + x + y| \quad \textit{[majorer } |f(x,y) - 1| \textit{ en observant que } |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}\textit{]},$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \quad \textit{[factoriser } |x^3 - y^3| \textit{ puis majorer].}$$

Exercice 3 Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1/2 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in \Delta = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}, \\ \frac{|y|}{x^2}\, e^{-\frac{|y|}{x^2}} & \text{si } (x,y) \notin \Delta. \end{cases}$

Dérivées partielles

Exercice 4

1. Montrer, en utilisant la définition, que $f(x,y) = xy$ est différentiable dans $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les dérivées partielles, là où elles existent, de

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y}\ ; \qquad\qquad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

   Ces fonctions sont-elles différentiables ?

3. Déterminer une équation du plan tangent en $M_0\,(1,2)$ à la surface d'équation cartésienne

$$z = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

4. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $h\,(t) = f\,(t, g\,(t))$. Calculer $h'(t)$ et $h''(t)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f, de $g^{'}\,(t)$ et $g''\,(t)$.
5. Soit $\varphi(t) = f(2t, -t)$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de $(0,0)$. Donner un développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 5 Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles premières et la différentiabilité en tout point de $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in \Delta = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}, \\ x \arctan\frac{y}{x} & \text{si } (x,y) \notin \Delta. \end{cases}$

Exercice 6 Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$?

Changements de variables et équations aux dérivées partielles (EDP)

Exercice 7 Soit f une fonction de deux variables. Résoudre les EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On considère la fonction $F :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

1. Déterminer $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}$.
2. Soit $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$. Résoudre l'EDP $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur Ω en passant en coordonnées polaires.

3. Calculer le Laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ de f en cordonnées polaires.

4. Trouver les solutions radiales de l'EDP de Laplace $\Delta f = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On effectue le changement de variables

$$u = x + ay, \qquad v = x + by$$

de sorte que $f(x,y) = F(u,v)$.

1. Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que ce changement de variables soit acceptable ?

2. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f à l'aide de celles de F.

3. En utilisant $a = -1$ et $b = 1$, résoudre l'EDP : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

4. En utilisant $a = 1$ et $b = -1$, résoudre l'EDP : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

5. En utilisant $a = 0$ et $b = 1$, résoudre l'EDP : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Extrema, fonctions implicites, extrema liés, optimisation

Exercice 10 Trouver les points critiques des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$ et, dans chaque cas, indiquer s'il s'agit d'extréma locaux.

$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$, $\quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$, $\quad f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Exercice 11 Soit $K = [0,1] \times [0,1]$ et f la fonction définie sur K par $f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$.

1. Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum global de f sur K.

2. Étudier les extrema globaux et locaux de f sur K.

Exercice 12 Applications du théorème des fonctions implicites

1. Soit Γ la courbe de $\mathbb{R}^2$ donnée implicitement par l'équation $x^3 + y^3 = xy + 1$. Démontrer que y peut s'exprimer comme une fonction de x, c'est-à-dire que $y = \varphi(x)$, au voisinage du point $(1,1)$. Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$. En déduire l'allure de Γ au voisinage de $(1,1)$.

2. Soit C la courbe de $\mathbb{R}^2$ donnée implicitement par l'équation $xy - \sin(y) + x = 0$. Démontrer que $y = \varphi(x)$ au voisinage de $x = 0$ pour une certaine fonction φ telle que $\varphi(0) = 0$. Donner un développement limité à l'ordre 3 de φ en 0.

Exercice 13 Soit $f(x,y) = xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Dessiner l'allure des lignes de niveaux de f.

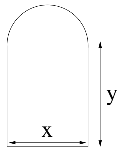
2. Étudier les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

3. Même question pour les extréma de f sachant que $4x^2 + y^2 = 4$.

Exercice 14 Trouver la distance (la plus courte) dans le plan du point $(1,2)$ à la droite d'équation $2x + 3y = 1$.

Exercice 15 En utilisant une quantité α d'aluminium, concevoir la boîte de conserve (un cylindre) ayant un volume V maximal, sachant que le fond et le dessus doivent avoir double épaisseur.

Exercice 16 (DS janvier 2012) La section d'un conduit d'air a la forme suivante



Pour optimiser le coût de construction, celui-ci doit avoir le plus petit périmètre possible sachant que, pour des raisons de fonctionnement, l'ouverture doit avoir une aire égale à c. Déterminer les dimensions x et y du rectangle de manière à optimiser le coût.

Exercice 17 Trouver les dimensions du cylindre de volume maximal qui peut être contenu dans une sphère de rayon R.

Exercice 18 Une entreprise chauffe ses locaux de la façon suivante : sur une période de 24h, par tranches de 8h, une chaudière chauffe avec une température constante,

T_0 de 9h à 17h (occupation des locaux), T_1 de 17h à 1h, T_2 de 1h à 9h.

Si la chaudière est maintenue à une température constante T pendant une tranche de 8h, la température y des locaux à la fin de la tranche est donnée par la relation

$$y = bx + (1-b)\,(aT + (1-a)S)\,,$$

où x est la température des locaux au début de la tranche horaire, S est la température extérieure (pour simplifier, on la supposera fixée une fois pour toute) et $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ sont des paramètres fixés. En particulier, si T est choisie telle que $y = x$ alors la température reste constante pendant les 8h considérées. Le coût du chauffage pendant cette tranche est donné par

$$\alpha(T-S)^2$$

où $\alpha > 0$ est une constante fixée (on pourra la prendre égale à 1 dans la suite).

1. Supposez que vous êtes le responsable du service gestionnaire. Votre objectif est de déterminer le plan de chauffage optimal (minimisant le coût) sur 24h afin que, pendant la période d'occupation des locaux, la température ambiante garde une valeur x_0 prescrite.

1.a. Comment doit être choisi T_0 pour que la température des locaux, étant à x_0 à 9h, reste constante de 9h à 17h ?

1.b. Quelle relation doivent alors vérifier T_1 et T_2 pour que la température revienne à x_0 après un cycle de 24h ?

1.c. Déterminer le programme optimal.

1.d. Application numérique : $a = 2/3$, $b = 1/4$, $S = 0°$, $x_0 = 20°$.

2. (facultative) Pour des raisons d'économie, le PDG décide de réduire subitement le budget de chauffage, c'est-à-dire qu'il fixe un coût, moindre que le précédent, et vous devez faire avec. Votre objectif est maintenant de maximiser la température x_0 des locaux pendant la période d'occupation avec les moyens dont vous disposez. Quel est le nouveau programme optimal ?
Application : $a = 2/3$, $b = 1/4$, $S = 0°$, budget de 1600 (baisse $\approx 30\%$ par rapport à 1).