Interrogation n°1 : Correction

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Toute réponse devra être précisément justifiée. Le sujet comporte 2 pages.

Durée de l'épreuve : 30 minutes

Exercice 1 : [2.5pts] cf Exo 1,2,3 et 7 du TD

Pour tout $n \geq 1$, on définit $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$.

1. Pour tout $n \geq 1$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

   Réponse : On a une somme téléscopique :
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) = -1 + \frac{1}{n+1}.$$

2. En déduire la nature et la somme de la série de terme général u_n.

   Réponse : On a $\lim_{n\to+\infty} S_n = -1$. La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 1}$ converge donc la série de terme général u_n est convergente et la somme de la série vaut -1.

Exercice 2 : [7.5pts]

Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

1. $\sum e^{-\frac{1}{n^2}}$

   Réponse : **cf Exo 8 du TD**
   Comme $\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n^2}} = 1$, la série diverge grossièrement.

2. $\sum \dfrac{(\ln n)^2}{n^3}$

   Réponse : **cf Exo 4 du TD**
   Pour tout $n \geq 1$, $\ln(n) \leq \sqrt{n}$ donc
   $$\frac{(\ln n)^2}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}.$$
   Or la série de terme général $1/n^2$ converge (série de Riemann). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{(\ln n)^2}{n^3}$ converge.

3. $\sum \dfrac{1}{1+2^n}$

   Réponse : **cf Exo 6 du TD**
   On a
   $$\frac{1}{1+2^n} \sim \frac{1}{2^n},$$
   et la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique de raison $1/2$). Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{1+2^n}$ converge.

4. $\sum \dfrac{n^n}{n!}$

   Réponse : **cf Exo 9 du TD**
   La série est à termes positifs, on peut appliquer la règle de d'Alembert :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{n^n (n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$
   Donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e > 1,$$
   et la série $\sum \frac{n^n}{n!}$ diverge.

5. $\sum \left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)$ *Indication :* on pourra poser $u_n = \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ et étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

   Réponse : **cf Exo 5 du TD**
   On a
$$1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\pi^2}{2n^2} - \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right).$$
   Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \frac{\pi^2}{2},$$
   et donc la série de terme général positif $\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ est de même nature que la série de terme général $1/n^2$ (série de Riemann convergente). Donc $\sum \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ converge.