Contrôle Continu : Correction

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Toute réponse devra être précisément justifiée. Le sujet comporte 1 page.

Durée de l'épreuve : 1 heure

Exercice 1 :
Soit X une variable aléatoire uniformément distribuée sur $\{-2, -1, 0, 1\}$. Dans la suite de l'exercice, $|\cdot|$ désigne la valeur absolue.

1. *[2 pts]* Quelle est la loi de $|X|$?
2. *[2 pts]* Calculer $\mathbb{E}[|X|]$ et $\mathrm{Var}(|X|)$.

Correction :

1. $|X|$ est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On a
$$\mathbb{P}(|X| = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(|X| = 1) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(|X| = 2) = \mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{4}.$$
2. On a
$$\mathbb{E}[|X|] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1.$$
De plus, $\mathrm{Var}(|X|) = \mathbb{E}[|X|^2] - \mathbb{E}[|X|]^2$ avec
$$\mathbb{E}[|X|^2] = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$
Ainsi $\mathrm{Var}(|X|) = 3/2 - 1 = 1/2$.

Exercice 2 : *[3 pts]*
Soit X une variable aléatoire distribuée selon la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\right].$$

Correction :
D'après le lemme de transfert,
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}.$$
On a alors
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1\right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda} - 1).$$
Conclusion :
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Exercice 3 :
On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à obtenir Pile. On note X le nombre total de lancers de pièce. Indépendamment du lancer de pièce, on jette un dé non truqué jusqu'à obtenir 6. On note Y le nombre total de jets de dé.

1. *[2 pts]* Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de Y ?
2. *[2 pts]* Pour tout $k \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(Y \leq k)$ et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y > k)$.
3. *[2 pts]* Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.

Correction :

1. X et Y modélisent un premier succès lors de la répétition d'une expérience de Bernoulli. La probabilité d'obtenir Pile lors d'un lancer de pièce vaut $1/2$ et la probabilité d'obtenir un 6 lors d'un lancer de dé vaut $1/6$. Donc $X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(1/2)$ et $Y \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(1/6)$.
2. Soit $k \geq 1$.
$$\mathbb{P}(Y \leq k) = \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}.$$
On reconnait une somme géométrique et on obtient finalement
$$\mathbb{P}(Y \leq k) = \frac{1}{6}\frac{1-(5/6)^k}{1-5/6} = 1-(5/6)^k.$$
On a alors
$$\mathbb{P}(Y > k) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq k) = (5/6)^k.$$
3. D'après la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X < Y \ , \ X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(k < Y \ , \ X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > k) \times \mathbb{P}(X = k) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^k \quad \text{(série géométrique)} \\
&= \frac{5}{12}\frac{1}{1-5/12} = \frac{5}{7}.
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

Une urne contient 4 boules rapportant 0 point, 1 point, 1 point ou 2 points. On effectue n tirages avec remise et l'on note $X_1, \ldots, X_n$ les variables aléatoires modélisant le nombre de points obtenu à chaque tirage. On note S le score total : $S = X_1 + \ldots + X_n$.

1. *[2 pts]* Calculer la fonction génératrice de X_1.
2. *[2 pts]* Montrer que la fonction génératrice de S est égale à
$$G_S(s) = \frac{1}{2^{2n}}(s+1)^{2n}, \quad s \in [-1, 1].$$
3. (a) *[1 pt]* Rappeler la formule du binôme de Newton.
   (b) *[2 pts]* En utilisant la question 2. et la formule du binôme de Newton, déterminer la loi de S.

Correction :

1. X_1 est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. On a $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1/4$, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = 1/4$ d'où, pour tout $s \in [-1,1]$,
$$G_{X_1}(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2 = \left(\frac{1+s}{2}\right)^2.$$

2. Comme S est une somme finie de variables aléatoires mutuellement indépendantes, on a pour tout $s \in [-1,1]$,
$$G_S(s) = G_{X_1}(s) \times \ldots \times G_{X_n}(s) = (G_{X_1}(s))^n,$$
la dernière égalité venant du fait que les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ ont la même loi. Ainsi, pour tout $s \in [-1,1]$,
$$G_S(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}(s+1)^{2n}.$$

3. (a) Formule du binôme de Newton : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} a^k b^{j-k}.$$

   (b) D'après la formule du binôme de Newton, on a pour tout $s \in [-1,1]$,
$$G_S(s) = \frac{1}{2^{2n}}(1+s)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \times s^k \times 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{k} s^k.$$
   La fonction génératrice détermine la loi de S et on a donc
$$\forall k \in [|0, 2n|], \quad \mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{k}.$$
   Ainsi,
$$\forall k \in [|0, 2n|], \quad \mathbb{P}(S = k) = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$
   Conclusion : S suit une loi binomiale de paramètre $2n$ et $1/2$.