Contrôle Continu

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Toute réponse devra être précisément justifiée. Le sujet comporte 2 pages.

Durée de l'épreuve : 1h20

Exercice 1 :
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}([0,\theta])$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(U_1,\dots,U_n)$ un n-échantillon de U. Ici, $\theta > 0$ est un réel inconnu que l'on cherche à estimer à l'aide de $(U_1,\dots,U_n)$.

1. *[2 pts]* Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta_n}$ de θ basé sur les variables aléatoires $(U_1,\dots,U_n)$.
2. *[2 pts]* Déterminer la densité de probabilité de $\widehat{\theta_n}$.

Exercice 2 :
Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes. On rappelle que $|\cdot|$ désigne la valeur absolue.
Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On rappelle que la densité de X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, $\sigma > 0$ est un réel inconnu que l'on cherche à estimer à l'aide de $(X_1,\dots,X_n)$. Attention, on cherche à estimer σ et pas σ^2.

PARTIE A

1. *[1 pt]* Montrer que
$$\mathbb{E}[|X|] = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$
2. *[1 pt]* Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on pose $Y_i = |X_i|$. À partir des variables aléatoires $(Y_1,\dots,Y_n)$, construire un estimateur $\widehat{\sigma_n}$ de σ basé sur la méthode des moments.
3. *[1 pt]* Étudier le biais de $\widehat{\sigma_n}$.
4. *[1.5 pts]* Montrer que $\widehat{\sigma_n}$ est un estimateur fortement consistant de σ.
5. *[2 pts]* Calculer l'erreur quadratique moyenne $EQM_\sigma(\widehat{\sigma_n})$ de $\widehat{\sigma_n}$.
6. *[1 pt]* L'estimateur $\widehat{\sigma_n}$ converge t'il en moyenne quadratique vers σ ?
7. *[1.5 pts]* Proposez un autre estimateur de σ basé sur la méthode des moments et les variables aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$.

PARTIE B

8. *[2 pts]* Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widetilde{\sigma_n}$ de σ basé sur les variables $(X_1, \ldots, X_n)$ vérifie
$$\widetilde{\sigma_n} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}.$$
9. *[1.5 pts]* Montrer que $\widetilde{\sigma_n}$ est un estimateur fortement consistant de σ.
10. *[1.5 pts]* On rappelle que $\mathbb{E}[X^4] = 3\sigma^4$. Étudier la convergence en loi de
$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sigma^2\right).$$
11. *[1.5 pts]* En déduire la convergence en loi de $\sqrt{n}(\widetilde{\sigma_n} - \sigma)$.
12. *[1.5 pts]* Montrer que
$$EQM_\sigma(\widetilde{\sigma_n}) \sim_{n\to+\infty} \frac{\sigma^2}{2n}.$$

CONCLUSION

13. *[1 pt]* En comparant les erreurs quadratiques moyennes de $\widehat{\sigma_n}$ et $\widetilde{\sigma_n}$, quel estimateur vous semble le meilleur quand n est grand ?