Contrôle Continu 2

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Toute réponse devra être précisément justifiée. Le sujet comporte 1 page.

Durée de l'épreuve : 30 minutes

Question de cours : *[2 pts]*
Énoncer le théorème limite central. On précisera bien les hypothèses du théorème.

Exercice 1 :
Soit Z une variable aléatoire de densité f_Z définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$f_Z(x) = \frac{1}{x \ln 2} \mathbb{1}_{[1,2]}(x).$$

1. *[1 pt]* Vérifier que f_Z est une densité de probabilité.
2. *[2 pts]* Calculer $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

Correction :

1. f_Z est une densité de probabilité car f_Z est une fonction continue par morceaux, positive et
$$\int_{\mathbb{R}} f_Z(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{x \ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2} [\ln x]_1^2 = 1.$$
2. On a
$$\mathbb{E}[Z] = \int_{\mathbb{R}} x f_Z(x)dx = \int_1^2 \frac{dx}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2},$$
et $\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2$ avec
$$\mathbb{E}[Z^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_Z(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{\ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2 \ln 2},$$
d'où
$$\mathrm{Var}(Z) = \frac{3\ln(2) - 2}{2(\ln 2)^2}.$$

Exercice 2 :
Soit X une variable aléatoire de densité f_X définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$f_X(x) = \frac{3}{x^2} \mathbb{1}_{]3,+\infty[}(x).$$

1. *[1.5 pts]* Calculer $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 6)$
2. *[2.5 pts]* Déterminer la densité de probabilité de $Y = \sqrt{X}$.
3. *[1 pt]* La variable aléatoire X admet-elle un moment d'ordre 1 ?

Correction :

1. On a
$$\mathbb{P}(2 \leq X \leq 6) = \int_2^6 f_X(x)dx = \int_3^6 \frac{3}{x^2}dx = 3\left[\frac{-1}{x}\right]_3^6 = 3\left(\frac{-1}{6} - \frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. On utilise la méthode de la variable muette. Soit h une fonction continue et bornée. On a
$$\mathbb{E}[h(Y)] = \int_{\mathbb{R}} h(\sqrt{x})f_X(x)dx = \int_3^{+\infty} h(\sqrt{x})\frac{3}{x^2}dx.$$
On effectue le changement de variable $\phi : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est bien un C^1-difféomorphisme de $]3, +\infty[$ dans $]\sqrt{3}, +\infty[$. On pose alors $y = \sqrt{x}$ (donc $x = y^2$ et $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$), ce qui conduit à
$$\mathbb{E}[h(Y)] = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} h(y)\frac{3}{y^4}2ydy = \int_{\mathbb{R}} h(y)\frac{6}{y^3}\mathbb{1}_{]\sqrt{3},+\infty[}(y)dy.$$
Conclusion : La densité de Y est
$$f_Y(x) = \frac{6}{x^3}\mathbb{1}_{]\sqrt{3},+\infty[}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. La fonction $x \in]3, +\infty[\mapsto xf_X(x)$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (car $xf_X(x) = \frac{3}{x}$) donc X n'admet pas de moment d'ordre 1.
On peut refaire le calcul pour s'en convaincre. Soit $M \geq 3$ un réel. On a
$$\int_3^M \frac{3}{x}dx = 3\ln\left(\frac{M}{3}\right),$$
donc
$$\lim_{M\to+\infty} \int_3^M \frac{3}{x}dx = +\infty.$$
Ainsi, la fonction $x \in]3, +\infty[\mapsto xf_X(x)$ n'est pas intégrable et X n'admet pas de moment d'ordre 1.