Contrôle Continu

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Toute réponse devra être précisément justifiée. Le sujet comporte 1 page.

Durée de l'épreuve : 1h20

Exercice 1 :
Soit X une variable aléatoire de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = (k+1)\theta^{-k-1}x^k \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

où $k \in \mathbb{N}$ est supposé **connu**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, $\theta > 0$ est un réel inconnu que l'on cherche à estimer à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. *[1 pt]* Expliquer pourquoi le modèle statistique étudié ici n'est pas régulier.
2. *[2 pts]* Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ basé sur les variables $(X_1, \ldots, X_n)$.
3. *[2 pts]* Montrer que la densité de probabilité de $\widehat{\theta}_n$, notée g, est donnée par
$$g(x) = n(k+1)\theta^{-n(k+1)}x^{n(k+1)-1}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
4. *[2 pts]* Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur biaisé mais asymptotiquement sans biais de θ.
5. (a) *[2 pts]* Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est une statistique exhaustive.
   (b) *[2 pts]* Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est une statistique totale. *Indication : On rappelle que si pour tout $t > 0$, $\int_0^t \psi(x)dx = 0$, alors la fonction ψ est nulle presque partout sur $\mathbb{R}^+$.*
6. (a) *[1 pt]* Proposer un estimateur $\widetilde{\theta}_n$ de θ sans biais qui s'exprime en fonction de $\widehat{\theta}_n$.
   (b) *[2 pts]* Que pouvez-vous dire de la statistique $\widetilde{\theta}_n$? (Énoncer un résultat d'optimalité).

Exercice 2 :
La concentration dans le sang d'une certaine drogue évolue avec le temps selon le schéma suivant : à chaque instant $t \geq 0$, elle est une réalisation de la variable aléatoire $\theta t + \varepsilon$, où θ est un paramètre inconnu et ε est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Des biologistes, qui ont mesuré la concentration aux instants $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$, considèrent que ces n valeurs sont des réalisations de variables aléatoires **indépendantes**. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note donc X_i la variable aléatoire qui modélise la concentration de la drogue au temps t_i :

$$X_i = \theta t_i + \varepsilon_i, \quad \text{où } \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On cherche à estimer θ à partir des variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$. On rappelle que la densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. *[2 pts]* Quelle est la loi de X_1 ? Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ? Ont-elles la même loi ? On donnera les réponses sans justification.
2. *[2 pts]* Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.
3. *[2 pts]* Déterminer la loi de $\widehat{\theta}_n$.
4. *[2 pts]* On admet que le modèle statistique est régulier. Montrer que la statistique $\widehat{\theta}$ est efficace.