Contrôle Continu

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation. Toute réponse devra être précisément justifiée. Le sujet comporte 1 page.

Durée de l'épreuve : 1h20

Les parties A et B de ce sujet sont indépendantes.
Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}\mathbb{1}_{]0,\theta]}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. Ici, $\theta > 0$ est un réel inconnu que l'on cherche à estimer à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$.

PARTIE A

1. *[1.5 pts]* Montrer que la variable aléatoire X_1^p est intégrable pour tout entier $p > 0$. S'ils existent, calculez les moments d'ordre p de X_1.
2. *[1 pt]* A partir de $(X_1, \ldots, X_n)$, construire un estimateur $\widehat{\theta_n}$ de θ basé sur la méthode des moments.
3. *[1 pt]* Étudier le biais de $\widehat{\theta_n}$.
4. *[1.5 pts]* Montrer que $\widehat{\theta_n}$ est un estimateur fortement consistant de θ.
5. *[2 pts]* Calculer l'erreur quadratique moyenne de $\widehat{\theta_n}$.
6. *[1 pt]* L'estimateur $\widehat{\theta_n}$ converge t'il en moyenne quadratique vers θ ?
7. *[2 pts]* Étudier la convergence en loi de $\sqrt{n}(\widehat{\theta_n} - \theta)$.

PARTIE B

8. *[2 pts]* Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widetilde{\theta_n}$ de θ basé sur les variables $(X_1, \ldots, X_n)$.
9. *[2 pts]* Montrer que $\widetilde{\theta_n}$ est absolument continue et que sa densité de probabilité est donnée par

$$g(x) = \frac{n}{2\theta^{n/2}}x^{\frac{n}{2}-1}\mathbb{1}_{]0,\theta]}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

10. *[1 pt]* Montrer que $\widetilde{\theta_n}$ est un estimateur biaisé mais asymptotiquement sans biais de θ.
11. *[2 pts]* Montrer que l'erreur quadratique moyenne de $\widetilde{\theta_n}$ est égale à $\dfrac{8\theta^2}{(n+4)(n+2)}$.
12. *[2 pts]* Étudier la convergence en loi de $n(\theta - \widetilde{\theta_n})$.

CONCLUSION

13. *[1 pt]* En comparant les erreurs quadratiques moyennes de $\widehat{\theta_n}$ et $\widetilde{\theta_n}$, quel estimateur vous semble le meilleur quand n est grand ?