Leçon 223: Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

GRELA Fabrice

Rapport de Master 2

Présentation orale effectuée le 14/09/2016

Université de Rennes 1
ENS Rennes

Professeur encadrant: Isabelle GRUAIS

Table des matières

Introduction.

Les suites numériques sont utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques.
Tout d'abord, les suites apparaissent naturellement en topologie. Dans le cas d'un espace métrique, on peut caractériser de nombreuses propriétés comme la continuité, la compacité, la complétude... en utilisant des caractérisations séquentielles, généralement plus simples à manipuler que les définitions théoriques. A partir de certaines propriétés de densité, les suites permettent de construire certains objets mathématiques comme l'intégrale de Riemann par exemple.
En analyse numérique, on utilise les suites afin d'utiliser des méthodes d'approximation de réels ou de complexes inconnus comme par exemple les zéros d'une fonction. Les suites sont un outil pertinent en informatique car elles permettent de discrétiser des problèmes qui peuvent ainsi être gérer par l'outil informatique : par exemple, le calcul numérique de l'intégrale d'une fonction continue utilise une méthode d'approximation de la fonction par une suite ou par "le découpage" de l'espace en subdivisions.
La notion principale sous-jacente à ces applications est l'étude de la convergence des suites.

Dans une première partie, nous allons donc définir la convergence des suites et la limite d'une suite. Nous chercherons à étendre cette notion de limite via les valeurs d'adhérence et nous présenterons une notion de convergence des suites moins usuelle, la convergence au sens de Cesàro.
La comparaison des suites est également importante et fera l'objet de la seconde partie. La comparaison des suites terme à terme permet ainsi d'obtenir des critères de convergence pour les suites. Nous chercherons ensuite à obtenir des informations sur le comportement asymptotique des suites en les comparant à des suites plus simples dont on connait des propriétés. Parmis ces propriétés, nous allons notamment nous interesser à la vitesse de convergence, fondamentale en analyse numérique (on souhaite que la convergence vers l'inconnue recherchée soit la plus rapide possible).
Enfin, nous nous interesserons à un type de suite particulier, les suites récurrentes. Nous établirons des critères de convergence selon les propriétés de continuité ou de monotonie de la fonction itérée puis nous parlerons des récurrences linéaires à coefficients constants et de leur résolution. Nous présenterons aussi une méthode de résolution numérique d'une équation qui utilise la théorie sur les suites récurrentes.

A travers cette leçon, nous donnerons des exemples de suites particulières (les suites de Cauchy, les suites adjacentes, les récurrences homographiques...) et nous illustrerons les résultats principaux de ce plan par des exemples, des contres-exemples et des applications à d'autres notions des mathématiques (les séries numériques, les probabilités, la topologie, l'analyse numérique...).

Première partie

Plan détaillé de la leçon.

1 Convergence de suites.

1.1 Limite de suites.

Nous allons commencer par définir la notion de suite convergente et définir la limite d'une suite. Nous verrons aussi que si la limite existe alors elle est unique.

Définition 1.1 : *Suite convergente et divergente.*

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_\epsilon,\ |u_n - l| \leq \epsilon.$$

On dit qu'une suite diverge si elle ne converge pas.

Théorème 1.2

Si $(u_n)_n$ converge vers l alors l est unique et est appelée limite de la suite $(u_n)_n$.

Exemple :
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0 et la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = n$ diverge.

Une première utilité de la convergence des suites est la caractérisation séquentielle de certaines propriétés topologiques (comme la continuité). On caractérise ainsi des propriétés topologiques, souvent abstraite, par des propriétés métriques, plus simples à manipuler en pratique.

Application : Caractérisation séquentielle de la limite.
Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ ssi pour toute suite $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}$ qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

Exemple :
La fonction $x \mapsto \sin(\dfrac{1}{x})$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Proposition 1.3

Toute suite numérique convergente est bornée.

Contre-exemple :
La réciproque est fausse : $(-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.

Il convient à présent de donner une première proposition élémentaire qui permet de déterminer si une suite converge.

Proposition 1.4 : *Convergence monotone.*

Une suite réelle $(u_n)_n$ monotone et bornée est convergente.

Voici un premier exemple de suite particulière, les suites de Cauchy, qui jouent un rôle fondamental dans la description topologique des espaces de suites, de fonctions etc... En effet, la définition de la complétude repose sur la convergence des suites de Cauchy.

Définition 1.5

On dit qu'une suite (u_n) est une suite de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \geq N,\ |u_n - u_m| \leq \epsilon.$$

Proposition 1.6

1. Toute suite convergente est de Cauchy.

2. Toute suite de Cauchy est bornée.

Théorème 1.7

Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente.

Exemple : La suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas convergente car elle n'est pas de Cauchy. En effet,

$$|u_{2n} - u_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Terminons cette partie en soulignant que les suites de Cauchy sont à la base d'une des constructions de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Application : Construction des nombres réels par les suites de Cauchy.

Nous allons généraliser la notion de limite de suites en définissant les valeurs d'adhérence.

1.2 Valeurs d'adhérence.

Définition 1.8

Soit (u_n) une suite. On appelle sous-suite ou suite extraite de la suite (u_n), toute suite $(u_{\phi(n)})$ où ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple :
La suite des termes pairs (u_{2n}) et celle des termes impairs (u_{2n+1}) sont des sous-suites de la suite $(u_n)_n$.

Voyons à présent un résultat qui relie une suite à ses sous-suites.

Proposition 1.9

Si une suite (u_n) converge vers l alors toute suite extraite de (u_n) est convergente et converge vers l.

Nous pouvons maintenant définir les valeurs d'adhérence d'une suite.

Définition 1.10

On appelle valeur d'adhérence d'une suite (u_n) tout élément de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) limite d'une suite extraite convergente de (u_n).

Exemples :
$u_n = (-1)^n$ à deux valeurs d'adhérence : -1 et 1.
$v_n = \cos(n)$ a pour valeurs d'adhérence tout $[-1; 1]$.

Comme la notion de valeur d'adhérence généralise le concept de limite de suites, nous allons énoncer quelques propositions illustrant les liens entre ces deux notions.

Proposition 1.11

Toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence qui est sa limite.

Remarque : Une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

Exemple :
La suite définie par $v_n = \sin(n)$ diverge car elle a pour valeurs d'adhérences tout $[-1; 1]$.

Contre-exemple :
La réciproque es fausse : la suite définie par $u_n = (1 - (-1)^n) \times n$ ne possède que 0 comme valeur d'adhérence mais diverge.

Le prochain théorème énonce un résultat très utile lorsque l'on cherche à montrer qu'une partie d'un ensemble est compacte. Ce théorème permet aussi de démontrer un résultat de régularité pour des fonctions définies et continues sur un segment (ou plus généralement sur un compact).

Théorème 1.12 : *Bolzano-Weierstrass.*

Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute suite bornée possède au moins une sous-suite qui converge.

Application : Théorème de Heine.
Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue, avec I un segment de $\mathbb{R}$, est uniformément continue sur I.

Terminons cette sous-partie en définissant la limite inférieure et la limite supérieure d'une suite. Ces concepts traduisent aussi une volonté de généraliser le concept de limite de suites. On verra aussi que les limites inférieures et supérieures ont un rapport avec les valeurs d'adhérence d'une suite.

Définition 1.13

Soit (u_n) une suite réelle. On définit $\limsup\limits_n u_n$ et $\liminf\limits_n u_n$ par

$$\limsup_n u_n = \lim_{n\to+\infty} (\sup_{k\geq n} u_k) \in \bar{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \liminf_n u_n = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{k\geq n} u_k) \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2 + \cos(\frac{n\pi}{2})$. Alors $\limsup u_n = 3$ et $\liminf u_n = 1$.

Proposition 1.14

On a $\liminf u_n = \sup\limits_n(\inf\limits_{k\geq n} u_k) \leq \limsup u_n = \inf\limits_n(\sup\limits_{k\geq n} u_k)$ avec égalité ssi (u_n) converge vers cette valeur commune.

Application : Lemme de Fatou.
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles positives. Alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_n (f_n(t))dt \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt.$$

Proposition 1.15

Soit (u_n) une suite réelle et $adh(u_n)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Alors $\liminf\limits_n u_n = \inf(adh(u_n))$ et $\limsup\limits_n u_n = \sup(adh(u_n))$.

Lorsque l'on parle de "suites convergentes", on sous-entend généralement la convergence au sens usuel, définie en début de section. Mais il existe d'autres modes de convergence comme par exemple la convergence au sens de Cesàro.

1.3 Convergence au sens de Cesàro.

Proposition 1.16 : *Moyenne de Cesàro*

Soit (u_n) une suite numérique qui converge vers $l \in \mathbb{C}$ alors (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_1 + ... + u_n}{n}$ converge aussi vers l. On dit que (u_n) converge en moyenne de Cesàro vers l.

Contre-exemple :
La réciproque est fausse : $u_n = (-1)^n$ convergence au sens de Cesàro mais ne converge pas "au sens usuel" définie dans la première section.

Exemple :
Soit (u_n) une suite telle que la sous-suite des termes pairs converge vers $a \in \mathbb{R}$ et telle que la sous-suite des termes impaires converge vers $b \in \mathbb{R}$ alors la moyenne de Cesàro de (u_n) converge vers $\dfrac{a+b}{2}$.

2 Comparaisons de suites.

Dans cette partie, nous allons présenter les principaux résultats permettant de comparer des suites et expliquer l'interêt des comparaisons. Par exemple, la comparaison terme à terme des suites permet d'énoncer des théorèmes de convergence. Par suite, il est naturel de s'interroger sur le comportement d'une suite "quand n est grand" : on parlera de comparaison asymptotique des suites. L'idée sous jacente aux comparaisons de suites est celle de la vitesse de convergence qui est fondamentale en analyse numérique : on va chercher à adopter les méthodes numériques qui convergent le plus rapidement vers la solution recherchée.

2.1 Comparaison terme à terme.

Théorème 2.1 : *Théorème des gendarmes.*

Soient $(u_n), (a_n)$ et (b_n) trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, on ait $a_n \leq u_n \leq b_n$. Si (a_n) et (b_n) sont convergentes et de même limite l alors (u_n) est convergente et sa limite est l.

Exemple :
La suite $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$ converge vers 0.

Voici à présent un second exemple de suite particulière, les suites adjacentes qui établissent un nouveau critère de convergence. Les suites adjacentes permettent aussi de démontrer un théorème sur les séries alternées très utile pour prouver la convergence de certaines séries ou justifier des permutations de limites et d'intégrales pour les séries.

Définition 2.2

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjancentes si :

1. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 2.3

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont la même limite.

Exemple :
$u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ sont adjecentes et convergent vers 1.

Application : Le critère des séries alternées.
Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante, qui converge vers 0. Alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge et les restes $|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k|$ sont majorés par a_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Comportement asymptotique.

Définition 2.4

On dit que (u_n) est négligeable devant une suite réelle positive (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$, si :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq \epsilon v_n.$$

Exemple :
Si (u_n) converge vers 0 alors on a $u_n = o(1)$.

Définition 2.5

On dit que (u_n) est équivalente à une suite (v_n) telle que $v_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$ pour un n_0 assez grand et on note $u_n \sim v_n$ si la suite $(u_n - v_n)$ est négligeable devant $(|u_n|)$.

Le théorème suivant fait le lien entre l'étude de certaines suites, celle des restes et des sommes partielles d'une série, et l'étude des séries numériques. Plus précisément, ce théorème de sommation des équivalents pour les séries numériques permet d'obtenir un développement asymptotique de suites et donc de connaître asymptotiquement le comportement d'une suite.

Théorème 2.6

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$.

1. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$ pour $n \to +\infty$.

2. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ pour $n \to +\infty$.

Application : Développement asymptotique de la série harmonique.
On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. Alors on a :

$$H_n = \log(n) + \gamma + o(\frac{1}{2n}),$$

avec γ la constante d'Euler.

Proposition 2.7

Soit $\sum u_n$ une série téléscopique associée à une suite (a_n) c'est-à-dire que $u_n = a_n - a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Alors la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de même nature et en cas de convergence, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} a_n - a_0.$$

Application : Formule de Stirling.
On a :

$$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

2.3 Comparaison des vitesses de convergence.

Dans cette section, nous allons formaliser la notion de vitesse de convergence et nous ferons le lien entre l'ordre d'une convergence et sa vitesse. Ces différentes définitions serons illustrées par des exemples et des contre-exemples.

Définition 2.8

Si la suite $\left(\dfrac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite λ, on dit alors que la convergence de la suite $(x_n)_n$ vers α est :
- lente pour $\lambda = 1$;
- géométrique de rapport λ pour $\lambda \in]0,1[$;
- rapide pour $\lambda = 0$.

Exemple :
Le nombre e peut être défini comme la limite de la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad x_n = (1+\frac{1}{n})^n.$$

On a le développement asymptotique suivant :

$$\forall n \geq 1, \quad x_n = \exp(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})),$$

d'ou $e_n =: e - x_n \sim_{+\infty} \dfrac{e}{2n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$.
La convergence de cette suite vers e est donc lente.
Si on considère la suite $(y_n)_n = (x_{2^n})_n$ alors la convergence est géométrique de rapport $0,5$.

Remarque 2.9

Plus généralement, si l'on a un développement asymptotique de la forme :

$$x_n = \alpha + \beta\lambda^n + o(\lambda^n)$$

avec β non nul et λ dans $]-1,1[$ la convergence de la suite (x_n) vers α est géométrique de rapport $|\lambda|$.

Contre-exemple :
En considérant les suites $(n\lambda^n)_n$ ou $\left(\dfrac{\lambda^n}{n}\right)_n$, on constate que la réciproque est fausse.

Définition 2.10

On dit que la convergence de la suite $(x_n)_n$ vers α est d'ordre $r \geq 1$ s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $|x_{n+1}-\alpha| \sim \lambda |x_n - \alpha|^r$ à l'infini.

Remarque 2.11

Le cas $r = 1$ correspond à une convergence lente ($\lambda = 1$) ou géométrique ($0 < \lambda < 1$). Si la convergence est d'ordre $r > 1$ alors $\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|}$ est équivalent à $\mu|e_n|^{r-1}$ qui converge vers 0, c'est-à-dire que la convergence est rapide.

Contre-exemple :
Une convergence rapide n'est pas obligatoirement d'un ordre $r \geq 1$. La suite définie $(x_n)_n$ définie par

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

a une convergence rapide. Cependant, si on pose $e_n = e - x_n$, on a pour tout $r > 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^r} = +\infty.$$

3 Suites récurrentes.

Définition 3.1

Soient (E, d) un espace métrique et h un entier naturel non nul. Une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans E est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire :

$$\forall n \geq h, \quad u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, ..., u_{n-h}),$$

où f est une application de E^h dans E.

L'objet de cette partie est d'étudier la convergence des suites récurrentes selon les propriétés de la fonction f (monontonie, continuité...). Nous nous interresserons au cas particulier des récurrences linéaires que nous résolverons explicitement pour l'ordre 2. Enfin, nous mettrons en pratique la théorie sur les suites récurrentes afin de présenter une méthode numérique.

3.1 Itération d'une fonction.

Cadre de cette leçon : Ici, I désigne un intervalle réel fermé et f une fonction définie sur I à valeurs dans I. On dit que I est stable par f.

Lemme 3.2

Si la suite $(x_n)_n$ converge, alors sa limite α est dans I et si de plus, la fonction est continue sur I alors $f(\alpha) = \alpha$. On dit alors que α est un point fixe de f.

Exemples :

- Si $u_0 \in [0; 1]$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$ alors (u_n) converge vers 1.
- Si $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$ et si la suite converge alors sa limite est -1 ou 3.

Contre-exemple :

1. La seule hypothèse de continuité de f n'assure pas la convergence de la suite $(x_n)_n$: pour $f(x) = -x$ sur $[-1, 1]$ on a $x_n = (-1)^n x_0$ pour tout n et cette suite est divergente pour $x_0 \neq 0$.
2. Une fonction discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ pour laquelle la suite $(x_n)_n$ converge vers l'unique point fixe de f est la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$. En effet, pour $x_0 \in \mathbb{Q}$, on a $x_n = 1$ pour tout $n \geq 1$ et pour $x_0 \notin \mathbb{Q}$, on a $x_1 = 0$ et $x_n = 1$ pour tout $n \geq 2$; donc dans tous les cas $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$ est point fixe de f.

Théorème 3.3

Si f est une fonction croissante de $I = [a, b]$ dans I, alors elle admet au moins un point fixe $\alpha \in I$.

Exemple :
La suite définie par $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ avec $a_0 = 7$ converge vers 2.

Contre-exemple :
Ce théorème n'est plus valable pour f décroissante en considérant, par exemple, f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2]$ et $f(x) = 0$ si $x \in]1/2, 1]$.
Il n'est pas valable non plus sur un intervalle fermé non borné si l'on considère $f(x) = x + 1$ sur $[0, +\infty[$.

Théorème 3.4

Si la fonction f est croissante alors la suite $(x_n)_n$ est croissante si $f(x_0) \geq x_0$ et décroissante si $f(x_0) \leq x_0$. Si l'intervalle I est borné alors cette suite est convergente et si de plus f est continue alors sa limite est un point fixe de f.

Contre-exemple :
Sans l'hypothèse de continuité sur le compact $[a, b]$ la suite $(x_n)_n$ ne converge pas nécessairement vers un point fixe de f. On peut par exemple considérer f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ sur $[0, 1/2[$, $f(x) = 1$ sur $[1/2, 1]$. La suite définie par $x_0 = 0$ et par $x_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})$ converge vers $\frac{1}{2}$ qui n'est pas un point fixe de f.

Théorème 3.5

Si la fonction f est décroissante alors elle admet au plus un point fixe dans I. Si de plus, l'intervalle I est borné et la fonction f continue, alors les suites extraites $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ convergent vers des points fixes de fof. Dans la cas où fof admet un unique point fixe, la suite $(x_n)_n$ converge et sa limite est ce point fixe qui est également l'unique point fixe de f.

Contre-exemple :
Avec les hypothèses précédentes, si la fonction fof admet plusieurs points fixes, la suite $(x_n)_n$ peut être divergente. Par exemple, la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 1 - x^2$ admet un unique point fixe $\alpha \in [0, 1]$ alors que fof admet trois points fixes : 0,1 et α. On peut alors vérifier que pour $x_0 \neq \alpha$, la suite récurrente $(x_n)_n$ diverge.

Application : Suites homographiques.

On dit qu'une suite (u_n) vérifie une récurrence homographique si elle vérifie $u_{n+1} = h(u_n)$ avec $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $ad - bc \neq 0$ et est bien définie si $u_n \neq \frac{-d}{c}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit (u_n) vérifiant une suite homographique. On considère l'équation

$$(E) : \quad h(x) = x \Leftrightarrow cx^2 - (a - d)x - b = 0.$$

On a alors :

1. Si (E) a deux racines disitinctes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = (\frac{a - \alpha c}{a - \beta c})^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}.$$
2. Si (E) admet une racine double α alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + \frac{c}{a - \alpha c} n.$$

Exemple :
On considère la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$ avec $u_0 = 1$. On a alors $(E) : \quad x^2 = 0$, donc

$$\frac{1}{u_n} = 1 + n \quad \Rightarrow \quad u_n = \frac{1}{1 + n}.$$

Lemme 3.6

Une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet au moins un point fixe.

Remarque 3.7

Pour cette leçon, nous avons restreint l'étude des suites sur des intervalles de $\mathbb{R}$. Il existe des théorèmes de points fixes plus généraux sur des espaces de Banach ou pour des compacts inclus dans des espaces vectoriels normés. Ces théorèmes ne seront pas rappelés ni étudiés dans le cadre de cette leçon.

Voici une application en probabilité de l'étude de la convergence des suites récurrentes.

Développement 3.8 : *Processus de Galton-Watson*

Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ et $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n < \infty$.
Soit $(X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi $\mathbb{P}_X$.
On définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \end{cases}$$

Objectif : Calculer $\pi_\infty := \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\ Z_n = 0)$.

On définit la fonction génératrice de X par $G : s \mapsto= \mathbb{E}[s^X] = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$.

Proposition 3.9

La probabilité d'extinction π_∞ est le plus petit point fixe de G sur l'intervalle $[0, 1]$.

Théorème 3.10

Si $m \leq 1$, alors $\pi_\infty = 1$.
Si $m > 1$, alors π_∞ est l'unique point fixe de G sur $]0, 1[$.

3.2 Récurrences linéaires à coefficients constants.

Définition 3.11

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ à valeurs complexes vérifie une récurrence linéaire homogène d'ordre h à coefficients constants si

$$\forall n \geq h, \quad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_h u_{n-h} \quad (a_1, ..., a_h \in \mathbb{C}).$$

Proposition 3.12

L'équation

$$x^h - a_1 x^{h-1} - ... - a_h = 0$$

s'appelle équation caractéristique de la récurrence précédente. Si on note $r_1, ..., r_q$ ses racines et $\alpha_1, ..., \alpha_q$ leur ordre de multiplicité respectifs, alors l'ensemble des suites $(u_n)_n$ vérifiant la récurrence précédente est l'ensemble des suites de la forme :

$$u_n = P_1(n) r_1^n + ... + P_q(n) r_q^n,$$

où pour tout i, P_i est un polynôme vérifiant $deg(P_i) < \alpha_i$.

Exemple : récurrence linéaire à coefficients constants d'ordre 2.

$$u_0, u_1 \in \mathbb{C}, \quad u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}.$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$x^2 - ax - b = 0. \qquad (E)$$

1. Si (E) possède deux racines distinctes x_1, x_2 alors les suites vérifiant la récurrence sont de la forme :

   $$u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

   Les coefficients λ et μ sont déterminés à partir des équations $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda x_1 + \mu x_2$.
2. Si (E) possède une racine double x alors les suites vérifiant la récurrence sont de la forme :

   $$u_n = (\lambda n + \mu) x^n.$$

   Les coefficients λ et μ sont déterminés à partir des équations $u_0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu)x$.
3. Lorsque a et b sont réels et que le discriminant $\Delta = a^2 + 4b$ est strictement négatif, en notant les racines de (E) sous la forme $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, u_n se met sous la forme :

   $$u_n = \rho^n (\gamma \cos(n\theta) + \sigma \sin(n\theta)).$$

Exemple :
Soit (a_n) définie par

$$a_0 = 1, a_1 = 2, \qquad a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{2} \quad \forall n \geq 2.$$

On a alors $a_n = \left(\cos(\frac{n\pi}{4} + 3\sin(\frac{n\pi}{4})\right) 2^{-n/2}$.
On constate alors que (a_n) tend vers 0.

Remarque 3.13

Si l'on considère les matrices

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \ldots \\ a_{n-h+1} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{h-1} & a_h \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la relation de récurrence se traduit par la relation matricielle :

$$U_n = AU_{n-1},$$

et donc $U_n = A^n U_0$.
On est ainsi ramené au calcul de A^n. On peut aussi remarquer que le polynôme caractéristique de la matrice A est, au signe près, le même que celui de la suite (a_n).

3.3 Application à la résolution d'équations numériques.

La résolution d'une équation $f(x) = 0$ sur I peut se ramener à un problème de recherche de point fixe en considérant la fonction g définie par :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = x - \lambda(x)f(x),$$

où la fonction λ définie sur I est telle que $g(I) \subset I$ et $\lambda(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ quitte à réduire I.

Développement 3.14 : *Méthode de Newton*

Théorème 3.15

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ avec $I = [c, d] \subset \mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe $a \in]c, d[$ tel que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$.
Alors pour x_0 assez proche de a, la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge vers a en vitesse quadratique.

Proposition 3.16

Sous les hypothèses du théorème précédent, en supposant que f soit convexe sur I et que $f'(a) > 0$, on a que la suite $(x_n)_n$ converge en vitesse quadratique vers a pour tout $x_0 \geq a$.

Exemple :
Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$; imaginons qu'on veuille estimer $a = \sqrt{y}$. Soit $f : x \mapsto x^2 - y$, définie sur un intervalle $[c, d]$, avec

$0 < c < d$ et $c^2 < y < d^2$. Pour approcher a, on doit itérer la fonction $F(x) = x - \frac{x^2-y}{2x}$.
On a alors : $F(x) - a = \frac{(x-a)^2}{2x}$ et $F(x) + a = \frac{(x+a)^2}{2x}$.
Donc, en prenant $x_0 \in]a, d]$ et en posant $x_n = F^n(x_0)$, on obtient : $\frac{x_n+a}{x_n-a} = \left(\frac{x_0+a}{x_0-a}\right)^{2^n}$.
Par conséquent : $1 + \frac{2a}{x_n-a} = \left(1 + \frac{2a}{x_0-a}\right)^{2^n} \geq 1 + \left(\frac{2a}{x_0-a}\right)^{2^n}$.
On obtient donc un encadrement de l'erreur : $0 < x_n - a \leq 2a\left(\frac{x_0-a}{2a}\right)^{2^n}$.

Exemple : Approximation du nombre d'or
Le nombre d'or $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ est un point fixe de $F(x) = \sqrt{1+x}$ sur l'intervalle stable $[0, +\infty[$ ainsi que de $G(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle stable $[\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.
On a $F'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $G'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
On sait pour ces deux fonctions qu'il y a bien convergence car $|F'(x)| \leq 1/2$ et $|G'(x)| \leq 1/2$.
A priori, on sait seulement que la convergence est linéaire.
La méthode de Newton appliquée à $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ sur $[c, d] = I = [1, 2]$ (qui vérifie bien les hypothèses) offre donc directement une convergence plus rapide.

Deuxième partie

Développements.

4 Processus de Galton-Watson.

Cadre : De nombreux phénomènes d'évolution de population peuvent être modélisés en première approximation par un processus de branchement (réactions nucléaires en chaîne, étude des gènes, survivance des noms de famille...).

Modélisation mathématique :
Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ et $m = \mathbb{E}[X] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} np_n < \infty$.
Soit $(X_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi $\mathbb{P}_X$.
On définit la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \end{cases}$$

L'idée est de modéliser avec la suite $(Z_n)_n$ la taille d'une population. Plus précisément, Z_n symbolisera le nombre d'individus à la $n^{\text{ème}}$ génération, et pour $i \in [|1, Z_n|]$, $X_{i,n}$ représente le nombre de descendants que l'individu de la $n^{\text{ème}}$ génération portant le numéro i a engendré (les individus de la population que l'on considère génèrent des enfants tout seuls ; on pourra, par exemple penser aux végétaux). Aussi, chaque individu a la probabilité p_n d'engendrer n individus. On veut répondre à la question : quelle est la probabilité que la population considérée s'éteigne ?

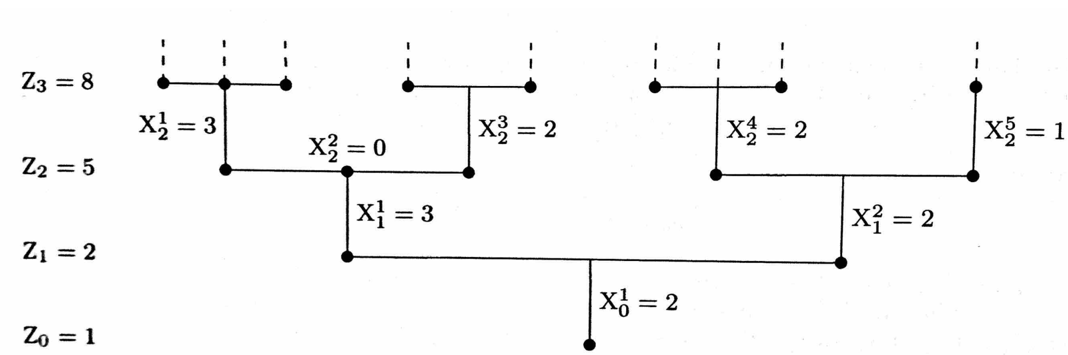

Figure 1 – Arbre de la desendance de Z_0.

Lemme 4.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, la variable Z_n est indépendante de $X_{i,n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; Z_n ne dépend que de Z_{n-1} et de la famille $(X_{i,n-1})_{i \in \mathbb{N}}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate, il vient : Z_n ne dépend que de la famille $(X_{i,j})_{i \geq 0, j \leq n-1}$.
Et, par indépendance des variables $X_{i,j}$, on obtient que $\forall i \in \mathbb{N}, Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$. $\square$

Objectif : Calculer $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\ Z_n = 0)$.

Notations :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\pi_n := \mathbb{P}(Z_n = 0) \quad \text{et} \quad \pi_\infty := \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0) \quad \text{appelée probabilité d'exctinction.}$$

Comme $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$, la suite d'événements $(\{Z_n = 0\})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc :

$$\pi_\infty = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \pi_n.$$

Si $p_0 = 0$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n \geq 1$ ps et $\pi_\infty = 0$.
Si $p_0 = 1$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = 0$ ps et $\pi_\infty = 1$.
On suppose donc désormais que $p_0 \in]0, 1[$.

Proposition 4.2

On définit la fonction génératrice de X par $G : s \mapsto= \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$.

On a les résultats suivants :

1. G est bien définie sur $[0, 1]$ et y est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. (a) G est strictement croissante sur $]0, 1[$.
   (b) G est convexe sur $]0, 1[$.
   (c) G est strictement convexe sur $]0, 1[\Leftrightarrow p_0 + p_1 < 1$.

Démonstration.
La série entière $\sum_{k\geq 0} p_k s^k$ ayant un rayon de convergence supérieure ou égale à 1 (car $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$), on a que la série $\sum p_n s^n$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$.

1. Intéressons-nous à la régularité de la série sur $[0, 1]$.
   $\forall k \in \mathbb{N}, s \mapsto p_k s^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, la série $\sum_{k\geq 0} p_k 1^k$ converge, et la série de fonctions $\sum_{k\geq 1} k p_k s^{k-1}$ converge normalement (car X est intégrable) donc uniformément sur $[0, 1]$.
   Par conséquent, d'après le théorème de dérivation des séries, G est bien définie et est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
2. On a, par théorème de dérivation terme à terme d'une série entière, :

$$\forall s \in [0, 1[, G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} \text{ et } G''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k s^{k-2}$$

   Comme $p_0 < 1$, il existe $k_0 > 0$ tel que $p_{k_0} > 0$.
   (a) Ainsi : $\forall s \in]0, 1[, G'(s) \geq k_0 p_{k_0} s^{k_0 - 1} > 0$ et G est strictement croissante sur $]0, 1[$.
   (b) Aussi : $\forall s \in]0, 1[, G''(s) \geq k_0 (k_0 - 1) p_{k_0} s^{k_0 - 2} \geq 0$ et G est convexe sur $]0, 1[$.
   (c) Si $p_0 + p_1 = 1$, alors on a $k_0 = 1$ et G est affine donc n'est pas strictement convexe sur $]0, 1[$.
   Si $p_0 + p_1 < 1$, alors il existe $k_1 > 1$ tq $p_{k_1} > 0$ et $G'' > 0$ sur $]0, 1[$ d'où la stricte convexité.

□

Proposition 4.3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la série génératrice de Z_n par $G_n : s \mapsto= \mathbb{E}[s^{Z_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = k\right) s^k$.
Comme précédemment, on peut montrer que G_n est bien définie sur $[0,1]$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $G_n = \underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{n \text{ fois}}$ (sur $[0,1]$).

Démonstration.
On procède par récurrence.
Initialisation : $G_1(s) = \mathbb{E}[s^{Z_1}] = \mathbb{E}[s^{X_{1,0}}] = \mathbb{E}[s^X] = G(s)$
Supposons que $G_n = G \circ \cdots \circ G$.

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \mathbb{E}\left[s^{Z_{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_{i,n}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}} \mathbb{1}_{Z_n=k}\right)\right] \text{ car } Z_n < \infty \text{ ps, } X \text{ étant finie ps} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}} \mathbb{1}_{Z_n=k}\right] \text{ (par Fubini Tonelli, car les termes sont tous positifs)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}}\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Z_n=k}\right] \text{ (car } Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[s^{X_{i,n}}\right] \mathbb{P}(Z_n = k) \text{ (car les } X_{i,n} \text{ sont indépendants)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[s^X\right]^k \mathbb{P}(Z_n = k) \text{ (car les } X_{i,n} \text{ ont même loi)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) G(s)^k = G_n(G(s))
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence. □

Proposition 4.4

La probabilité d'extinction π_∞ est le plus petit point fixe de G sur l'intervalle $[0,1]$.

Démonstration.
La proposition précédente donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall s \in [0,1],\ G_{n+1}(s) = G(G_n(s))$.
En évaluant en 0, on obtient la relation : $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$, puis par continuité de G sur $[0,1]$, on obtient que π_∞ est un point fixe de G.
Montrons que c'est le plus petit. Soit $u \in]0,1]$ un point fixe de G. Par récurrence, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n \leq u$.
• Initialisation : on a $\pi_1 = G(\pi_0) = G(\mathbb{P}(Z_0 = 0)) = G(0) \leq G(u) = u$, car G est croissante.
• Supposons que $\pi_n \leq u$. Alors $\pi_{n+1} = G(\pi_n) \leq G(u) = u$, par croissance de G.
Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n \leq u$, donc par passage à la limite : $\pi_\infty \leq u$. □

Théorème 4.5

Si $m \leq 1$, alors $\pi_\infty = 1$.
Si $m > 1$, alors π_∞ est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$.

Démonstration.
Puisque $G(1) = 1$, le graphe de G coupe la droite $y = x$ sur l'intervalle $[0,1]$ au moins au point $(1,1)$. On rappelle qu'on a deux cas :
• Si $p_0 + p_1 = 1$ alors G est une fonction affine et comme $G(0) = p_0 > 0$, G a un unique point fixe en $(1,1)$.
• Sinon, G est strictement convexe sur $]0,1[$ et il en va de même pour $x \mapsto G(x) - x$ qui s'annule donc au plus deux fois. plus [1]

Rappelons que l'on a aussi :$G'(0) = p_1$ et $G'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = m$. Etudions la fonction $x \in [0,1] \mapsto G(x) - x$.

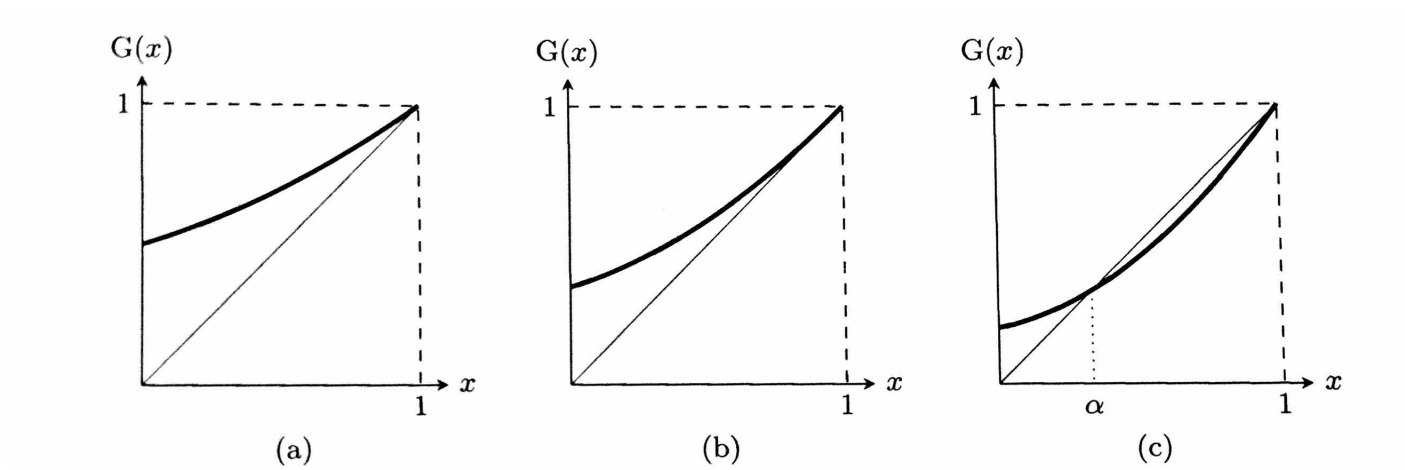

FIGURE 2 – Fonction génératrice de X, dans le cas : (a) $m < 1$, (b) $m = 1$ et (c) $m > 1$.

Supposons $m > 1$.

Alors $G' - 1$ est une fonction croissante de $p_1 - 1 < 0$ (car $p_1 = 1 \Rightarrow m = 1$ ou bien plus simplement car $p_0 > 0$) à $m - 1 > 0$, donc elle s'annule en un point $\alpha \in]0,1[$.
La fonction $G-\mathrm{Id}$ est alors décroissante sur $[0,\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha,1]$. Comme $G(0) - 0 = p_0 > 0$ et $G(1) - 1 = 0$, il existe un point dans l'intervalle $]0,\alpha]$ où $G-\mathrm{Id}$ s'annule.
π_∞ est donc l'unique point fixe de G sur l'intervalle $]0,1[$ (car G en a au plus 2).

Supposons $m \leq 1$.

Alors $G' - 1$ est une fonction croissante sur $[0,1]$, négative ou nulle en 1 ; donc négative sur $[0,1]$.
Donc $G-\mathrm{Id}$ est décroissante sur $[0,1]$, et s'annule en 1. Comme cette fonction admet au plus 2 annulations, elle ne s'annule qu'en 1 (car sinon elle s'annulerait sur un intervalle non-réduit à un singleton).
Par conséquent, $\pi_\infty = 1$.

□

1. En effet, si cette fonction s'annule en trois points distincts, par le théorème de Rolle, sa dérivée s'annulera en deux points distincts, $a < b$. Mais $x \mapsto G(x) - x$ est convexe, donc sa dérivée est croissante, donc nulle sur $[a,b]$. Cela implique que $G' - 1$ n'est pas strictement croissante, et donc que $x \mapsto G(x) - x$ n'est pas strictement convexe. Attention à ne pas dire que "strictement convexe" équivaut à "dérivée seconde strictement positive" pour les fonctions deux fois dérivables (on pourra penser par exemple à la fonction $x \mapsto x^4$).

Remarque :
Supposons que l'équation $G(x) = x$ admette une solution $0 < p < 1$. On a alors $p = \pi_\infty$ par la proposition précédente. De plus, puisque $G(p) - p = 0$ et $G(1) - 1 = 0$, le théorème de Rolle appliqué à $x \mapsto G(x) - x$ montre qu'il existe $z \in]p, 1[$ tel que $G'(z) = 1$. Comme G est strictement convexe on a nécessairement $m = G'(1) > 1$.

Remarque 4.6

On donne ici une première idée de l'évolution de la taille de la population, *i.e.* de la suite Z_n.

On a $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.
On va raisonner par récurrence.
- $Z_0 = 1$ donc $\mathbb{E}[Z_0] = 1 = m^0$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

<u>Méthode 1 :</u>

On peut dériver G_n (comme pour G), et on a, pour $s \in [0, 1]$,

$$G'_{n+1}(s) = G'(s)(G'_n \circ G(s))$$

Donc en 1 :

$$G'_{n+1}(1) = \mathbb{E}[X](G'_n(G(1)) = mG'_n(1) = m^{n+1}$$

<u>Méthode 2 :</u>

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_{n+1}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}\middle| Z_n\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{i \leq Z_n} X_{i,n}\middle| Z_n\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{i \leq Z_n} \mathbb{E}\left[X_{i,n} | Z_n\right]\right] \text{(FT car } \geq 0 \text{ ps } \oplus\ \mathbb{1}_{i \leq Z_n}\ Z_n\text{-mesurable)} \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E}\left[X_{i,n}\right]\right] (X_{i,n} \perp\!\!\!\perp Z_n) \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} m\right] = m\mathbb{E}\left[Z_n\right] = m^{n+1}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la récurrence.

Remarque 4.7

En fait, la suite $(Z_n)_n$ est une chaîne de Markov issue de 1, dont l'espace d'états est dénombrable. L'état 0 est absorbant. La chaîne est transciente. La question est ici de savoir si elle "sort" de $\mathbb{N}$ par 0 ou par l'infini.

5 Méthode de Newton.

Théorème 5.1

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ avec $I = [c, d] \subset \mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe $a \in]c, d[$ tel que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$.
Alors pour x_0 assez proche de a, la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge vers a en vitesse quadratique.

✓ Avantages de la méthode : s'il y a convergence, celle-ci est rapide (souvent quadratique), elle nécessite un seul point de départ.
✓ Inconvénients de la méthode : f doit être suffisamment régulière, la convergence n'est pas assurée dans tous les cas, s'il y a plusieurs racines elle ne converge par forcément vers la plus proche du point de départ.

Démonstration.
Comme $f'(a) \neq 0$, quitte à travailler avec $-f$, on suppose que $f'(a) > 0$.
Donc f est localement strictement croissante sur un voisinage de a (car f' est continue). Donc, quitte à réduire I, on peut supposer que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' \neq 0$ sur I.
De plus, il existe $\alpha > 0$ tel que $J :=]a - \alpha, a + \alpha[\subset I$.
Posons $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ pour tout $x \in J$ (F est bien définie).
Soit $x \in J$. On a :

$$F(x) - a = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned} |F(x) - a| &\leq \frac{\sup_J |f''|}{2|f'(x)|}(a-x)^2 \\ &\leq C(a-x)^2 \qquad \text{avec } C = \frac{\sup_J |f''|}{2 \inf_J |f'|} \end{aligned}$$

La constante C est bien définie car f'' et f' sont continues sur I.
Quitte à réduire α, on peut supposer que $\alpha < 1/C$.
On a alors $F(x) \in J$.

Pour $x_0 \in J$, $x_{n+1} = F(x_n)$ et la suite $(x_n)_n$ est bien définie.
Par conséquent, si $x_0 \in J$, $x_n \in J$ et $|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2$.
Une récurrence immédiate montre que : $C|x_n - a|^2 \leq C^2|x_{n+1} - a|^2 \leq ... \leq (C|x_0 - a|)^{2n} \leq (\underbrace{C\alpha}_{<1})^{2n}$.

Cette inégalité prouve la convergence d'ordre 2 de $(x_n)_n$ vers a.
On conclut donc que $(x_n)_n$ converge vers a en vitesse quadratique.

□

Proposition 5.2

Sous les hypothèses du théorème précédent, en supposant que f est convexe sur I et que $f'(a) > 0$, on a que la suite $(x_n)_n$ converge en vitesse quadratique vers a pour tout $x_0 \geq a$.

Démonstration.
Désormais, notons $J = [a, d]$.
Comme f est convexe sur J, $f' > 0$ sur J et de plus, comme f s'annule en a, on a $f \geq 0$ sur J.
Soit $x \in J$.
On a

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x.$$

De plus, par l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe $z \in]a, x[$ tel que

$$F(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x-a)^2 > 0 \qquad \text{car } f'' \text{ et } f' \text{ sont strictement positives.}$$

Aussi, pour $x_0 \in J$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in]a, d]$ car $a \leq F(x) < x \leq d$ pour tout $x \in J$.
Donc (x_n) est strictement décroissante, minorée par a qui est l'unique point fixe de F sur $[a, +\infty[$.
Donc $(x_n)_n$ converge vers a.
De plus, l'inégalité $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$ est vraie pour tout $n \geq 0$ donc la convergence est quadratique. $\square$

Interprétation géométrique :
La relation démontrée dans le théorème se réécrit :

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

ce qui exprime que $x_{n+1} = F(x_n)$ est l'abscisse de l'intersection avec l'axe Ox de la droite $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$, qui est la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_n.

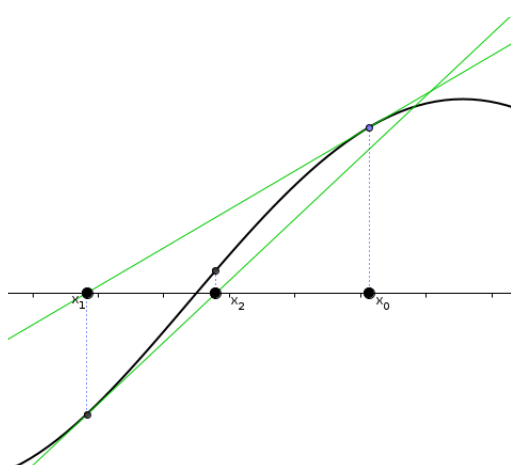

Figure 3 – Méthode de Newton.

Troisième partie

Entretien et questions.

Question 1 : Généraliser la méthode de Newton en dimension supérieure.

On dispose du théorème suivant :

Théorème 5.3

Soit E un espace vectoriel normé complet, soit Ω un ouvert de E et soit $f : \Omega \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Soit a un élément de Ω tel que $f(a) = 0$ et $f'(a)$ soit inversible. Il existe alors un voisinage B de a tel que pour tout $x_0 \in B$, la suite (x_n) donnée par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - f'(a)^{-1}(f(x_n))$$

soit définie pour tout n et converge quadratiquement vers a : il existe un nombre réel $C > 1$ tel que pour tout $n \geq 0$,

$$||x_n - a|| \leq C^{-1}C^{-2^n}.$$

La démonstration présentée dans le développement s'adapte assez facilement en dimension supérieure.

Démonstration.
Comme f' est continue, que $f'(a)$ est inversible et que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est ouvert, il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $f'(x)$ soit inversible pour tout $x \in B(a, r)$.
Soit $F : B(a, r) \mapsto E$ l'application définie par $F(x) = x - f'(x)^{-1}(f(x))$.
Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B. De plus, quitte à diminuer r, F est contractante.
En effet,

$$\begin{aligned}
F(a+h) - F(a) &= F(a+h) - a = h - f'(a+h)^{-1}(f(a+h)) \\
&= h - (f'(a) + O(||h||))^{-1}(f'(a)(h) + O(||h||^2)) \\
&= h - f'(a)^{-1} \circ f'(a)(h) + O(||h||^2) \\
&= O(||h||^2).
\end{aligned}$$

Il existe donc C tel que $||F(x) - a|| \leq C||x - a||^2$ pour tout $x \in B$.
Soit $x_0 \in B(a, C^{-2})$ pour la constante C du théorème. Montrons par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}\ ||x_n - a|| \leq C^{-1}C^{-2^n}\ \text{"} \quad \forall n \geq 0.$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
On a vu que $||x_{n+1} - a|| \leq C||x_n - a||^2$.
On en déduit que :

$$||x_{n+1} - a|| \leq C(C^{-1}C^{-2^n})^2 = C^{-1}C^{-2^{n+1}}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ce qui achève la récurrence.
On a montré que la méthode de Newton converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in B(a, 1/C^2)$. □

Question 2 : Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sin(n)$?

Montrons que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est $[-1,1]$. Il suffit pour cela de prouver que $X = \{\sin(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$.
On a $f^{-1}(X) = \mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ et comme $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (2π étant irrationnel), on en déduit que $f^{-1}(X)$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient $a < b$ deux éléments de $[-1,1]$. Comme $f^{-1}(]a,b[)$ est ouvert (f étant continue), on a :

$$f^{-1}(]a,b[\cap X) = f^{-1}(]a,b[) \cap f^{-1}(X) \neq \emptyset.$$

Ainsi, $]a,b[\cap X \neq \emptyset$.
Donc X est dense dans $[-1,1]$.

Question 3 : Montrer que $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

On a

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= Re(e^{in\theta}) = Re((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) \\
&= Re[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k}(i\sin(\theta))^k] \\
&= \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos(\theta)^{n-2p}\sin(\theta)^{2p}
\end{aligned}$$

Question 4 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

Remarque : Ce polynôme est appelé polynôme de Tchebychev.
Les polynômes de Tchebychev fournissent une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n = 0.$$

En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta) = 2\cos\theta\cos((n+1)\theta),$$

ce qui fournit encore

$$T_n(\cos\theta) + T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta).$$

Enfin, pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$T_n(x) + T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x).$$

Question 5 : Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(\sqrt{n})$?

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \cos(n)$ et $u_n = \cos(\sqrt{n})$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n^2}$. Posons alors $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$. ϕ est une fonction strictement croissante et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\phi(n)}$.
Or pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe une extractrice ψ tel que $(v_{\psi(n)})$ converge vers x (d'après la question 2). Ainsi, $(u_{\phi\circ\psi(n)})$ converge vers x avec $\phi \circ \psi$ une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante.
Donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\cos(\sqrt{n}))_n$ est $[-1, 1]$.

Références

[1] M. EL AMRANI - *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions.*,
Ellipses, 2011.

[2] J.E. ROMBALDI - *Eléments d'analyse réelle*,
EDP Sciences, 2004.

[3] X. GOURDON - *Analyse*,
Ellipses, 2008.

[4] W. APPEL - *Probabilités pour les non-probabilistes*,
HK éditions.