Test adaptatif d'homogénéité pour un processus de Poisson

Fabrice GRELA

Université de Rennes 1

encadré par Ronan LE GUEVEL

Mercredi 10 Janvier 2018

Bibliographie

M. Fromont, B. Laurent et P. Reynaud-Bouret. Adaptative tests of homogeneity for a Poisson process. *Annales de l'IHP*. (2011)

M. Fromont et B. Laurent. Adaptative goodness-of-fit tests in a density model. *Ann. Statist.* (2006)

But : construire un test d'homogénéité d'un processus de Poisson.

On suppose que l'on observe un processus de Poisson N sur $[0,1]$.

On note :
➤ s l'intensité du processus par rapport à une mesure μ sur $[0,1]$ et tel que $d\mu(x) = Ldx$ pour $L \in \mathbb{R}$,
➤ $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$.

On va construire un test adaptatif afin de tester l'hypothèse nulle (H_0) : "$s \in \mathcal{S}_0$" contre l'alternative (H_1) : "$s \notin \mathcal{S}_0$".

But : construire un test d'homogénéité d'un processus de Poisson.

On suppose que l'on observe un processus de Poisson N sur $[0,1]$.

On note :
➤ s l'intensité du processus par rapport à une mesure μ sur $[0,1]$ et tel que $d\mu(x) = Ldx$ pour $L \in \mathbb{R}$,
➤ $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$.

On va construire un test adaptatif afin de tester l'hypothèse nulle (H_0) : "$s \in \mathcal{S}_0$" contre l'alternative (H_1) : "$s \notin \mathcal{S}_0$".

But : construire un test d'homogénéité d'un processus de Poisson.

On suppose que l'on observe un processus de Poisson N sur $[0,1]$.

On note :
➤ s l'intensité du processus par rapport à une mesure μ sur $[0,1]$ et tel que $d\mu(x) = Ldx$ pour $L \in \mathbb{R}$,
➤ $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$.

On va construire un test adaptatif afin de tester l'hypothèse nulle (H_0) : "$s \in \mathcal{S}_0$" contre l'alternative (H_1) : "$s \notin \mathcal{S}_0$".

Performance du test

Soient $\beta \in]0,1[$, une classe de fonctions $\mathcal{S}_1$ et ϕ_α, un test de niveau $\alpha \in]0,1[$ à valeurs dans $\{0,1\}$ qui rejette l'hypothèse nulle (H_0) si $\phi_\alpha = 1$. On considère d, la distance induite par la norme $||\cdot||$ définie sur $L^2([0,1])$.

Définition : Vitesse de séparation uniforme

Si $\mathbb{P}_s$ désigne la loi d'un processus de Poisson N d'intensité s, la vitesse de séparation uniforme sous $\mathcal{S}_1$ est définie par

$$\begin{aligned}\rho(\phi_\alpha, \mathcal{S}_1, \beta) &= \inf\{\rho > 0, \sup_{s \in \mathcal{S}_1, d(s,\mathcal{S}_0) > \rho} \mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) \le \beta\} \\ &= \inf\{\rho > 0, \sup_{s \in \mathcal{S}_1, d(s,\mathcal{S}_0) > \rho} \mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 1) \ge 1 - \beta\}\end{aligned}$$

Définition : Vitesse de séparation minimax

La vitesse de séparation minimax sous $\mathcal{S}_1$ est définie par

$$\underline{\rho}(\mathcal{S}_1, \alpha, \beta) = \inf_{\phi_\alpha} \rho(\phi_\alpha, \mathcal{S}_1, \beta).$$

Test adaptatif : test qui atteint (à un facteur logarithmique près) les vitesses de séparation minimax sur plusieurs classes d'alternatives simultanément.

L'alternative (H_1)

On suppose que $s \in L^2([0,1])$ et on définie :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad \text{et} \quad ||f||^2 = \int_0^1 f^2(x)dx.$$

On introduit la base de Haar de $L^2([0,1])$,
$\{\phi_0, \phi_{(j,k)}, j \in \mathbb{N}, k \in \{0, ..., 2^j - 1\}\}$ où

$$\phi_0(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \quad \text{et} \quad \phi_{(j,k)}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k),$$

avec $\psi(x) = \mathbb{1}_{[0,1/2[}(x) - \mathbb{1}_{[1/2,1[}(x)$.

On pose $\alpha_0 = \langle s, \phi_0 \rangle$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $k \in 0, ..., 2^j - 1$,
$\alpha_{(j,k)} = \langle s, \phi_{(j,k)} \rangle$.

Définition : Besov bodies classiques

Pour $\sigma > 0$ et $R > 0$, on définie :

$$\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) = \{s \geq 0, s \in L^2([0,1]), s = \alpha_0\phi_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{(j,k)}\phi_{(j,k)},$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha^2_{(j,k)} \leq R^2 2^{-2j\sigma}\}.$$

Plus généralement, pour $p \geq 1$, $R > 0$ et $\sigma > \max(0, 1/p - 1/2)$:

$$\mathcal{B}^{\sigma}_{p,\infty}(R) = \{s \geq 0, s \in L^2([0,1]), s = \alpha_0\phi_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{(j,k)}\phi_{(j,k)},$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2^j-1} |\alpha_{(j,k)}|^p \leq R^p 2^{-pj(\sigma+1/2-1/p)}\}.$$

Définition : Besov bodies faibles

Pour $\gamma > 0$ et $R' > 0$, on définie :

$$W_\gamma(R') = \{s \geq 0, s \in L^2([0,1]), s = \alpha_0\phi_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{(j,k)}\phi_{(j,k)},$$

$$\forall t > 0, \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_{(j,k)}^2 \mathbb{1}_{\alpha_{(j,k)}^2 \leq t} \leq R'^2 t^{2\gamma/(1+2\gamma)}\}.$$

☞ On va construire un test adaptatif, ie qui atteint à un facteur logarithmique près les vitesses de séparation minimax simultanément sur tous les espaces $\mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R) \cap W_\gamma(R') \cap \mathbb{L}^\infty(R'')$ pour certains σ et pour tout $R, R', R'' > 0$.

Bilan (étapes du raisonnement)

➤ Etablir des bornes inférieures pour les vitesses de séparation uniformes relativement à la norme L^2 sur les espaces de l'alternative : *déterminer* $\tilde{\rho}$ *tel que* $\underline{\rho}(\mathcal{S}_1, \alpha, \beta) \geq \tilde{\rho}$.

➤ Construire un test non-asymptotique de niveau α qui est adaptatif : *trouver un test* ϕ_α *tel que, pour une certaine constante (explicite)* $C \geq 1$, $\rho(\phi_\alpha, \mathcal{S}_1, \beta) \leq C\tilde{\rho}$.

On aura obtenu le résultat souhaité car

$$\tilde{\rho} \leq \underline{\rho}(\mathcal{S}_1, \alpha, \beta) \leq C\tilde{\rho}.$$

Théorème

Soient $R > 0$, $R' > 0$ et $R'' \geq 2$, soient $\alpha, \beta \in]0, 1[$ vérifiant $\alpha + \beta \leq 0,59$.

- Si $\sigma \geq \max(\gamma/2, \gamma/(1+2\gamma))$ alors

$$\liminf_{L \to +\infty} L^{2\sigma/(1+4\sigma)} \underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap W_{\gamma}(R') \cap \mathbb{L}^{\infty}(R''), \alpha, \beta) > 0.$$

- Si $\sigma < \gamma/2$ et $\gamma > 1/2$ alors

$$\liminf_{L \to +\infty} \left(\frac{L}{\ln L}\right)^{\gamma/(1+2\gamma)} \underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap W_{\gamma}(R') \cap \mathbb{L}^{\infty}(R''), \alpha, \beta) > 0.$$

- Si $\sigma < \gamma/(1+2\gamma)$ et $\gamma \leq 1/2$ alors

$$\liminf_{L \to +\infty} \left(L^{1/4} \wedge L^{2\gamma/((1+4\sigma)(1+2\gamma))}\right) \underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap W_{\gamma}(R') \cap \mathbb{L}^{\infty}(R''), \alpha, \beta) > 0.$$

Théorème

Soient $R > 0$, $R' > 0$ et $R'' \geq 2$, soient $\alpha, \beta \in]0, 1[$ vérifiant $\alpha + \beta \leq 0,59$.

- Si $\sigma \geq \max(\gamma/2, \gamma/(1+2\gamma))$ alors

$$\liminf_{L \to +\infty} L^{2\sigma/(1+4\sigma)} \underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap W_{\gamma}(R') \cap \mathbb{L}^{\infty}(R''), \alpha, \beta) > 0.$$

- Si $\sigma < \gamma/2$ et $\gamma > 1/2$ alors

$$\liminf_{L \to +\infty} \left(\frac{L}{\ln L}\right)^{\gamma/(1+2\gamma)} \underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap W_{\gamma}(R') \cap \mathbb{L}^{\infty}(R''), \alpha, \beta) > 0.$$

- Si $\sigma < \gamma/(1+2\gamma)$ et $\gamma \leq 1/2$ alors

$$\liminf_{L \to +\infty} \left(L^{1/4} \wedge L^{2\gamma/((1+4\sigma)(1+2\gamma))}\right) \underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap W_{\gamma}(R') \cap \mathbb{L}^{\infty}(R''), \alpha, \beta) > 0.$$

Objectif : Construire un test de niveau α qui atteint la borne minimax pour tester (H_0) : "$s \in \mathcal{S}_0$" contre (H_1) : "$s \notin \mathcal{S}_0$" à partir de l'observation d'un processus de Poisson N ou des points $\{X_l, l = 1, ..., N_L\}$ du processus.

On remarque que : $d^2(s, \mathcal{S}_0) = \sum_{\lambda \in \Lambda_\infty} \alpha_\lambda^2$ où pour tout $\lambda \in \Lambda_\infty := \{(j,k), j \in \mathbb{N}, k \in \{0, ..., 2^j - 1\}\}$,

$$\alpha_\lambda := \langle s, \phi_\lambda \rangle = \int_0^1 \phi_\lambda(x) s(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^1 \phi_\lambda(x) s(x) d\mu(x).$$

Estimateur de α_λ : $\quad \widehat{\alpha_\lambda} := \frac{1}{L} \int_0^1 \phi_\lambda(x) dN_x = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{N_L} \phi_\lambda(X_l).$

Estimateur non biaisé de α_λ^2 :

$$T_\lambda = \widehat{\alpha_\lambda}^2 - \frac{1}{L^2} \int_0^1 \phi_\lambda^2(x) dN_x = \frac{1}{L^2} \sum_{l \neq l' = 1}^{N_L} \phi_\lambda(X_l) \phi_\lambda(X_{l'}).$$

Idée : construire des estimateurs de $d^2(s, \mathcal{S}_0) = \sum_{\lambda \in \Lambda_\infty} \alpha_\lambda^2$ en combinant certains $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_\infty}$ et en rejetant l'hypothèse nulle si l'un de ces estimateurs est trop grand.

Notations :

- $\forall J \geq 1, \quad S_J := Vect(\{\phi_0, \phi_\lambda, \lambda \in \Lambda_J\})$ où $\Lambda_J = \{(j,k) \in \{0,...,J-1\} \times \{0,...,2^j - 1\}\}$;
- $D_J = 2^J$ la dimension de S_J ;
- s_J la projection orthogonal de s sur le modèle S_J.

On obtient une famille de sous-ensembles de $\mathbb{L}^2([0,1])$ de dimension finie : $(S_J)_{J \geq 1}$; où S_J est appelé *modèle*.

Estimateur de $d^2(s, \mathcal{S}_0)$ *:* $\quad T_J = \sum_{\lambda \in \Lambda_J} T_\lambda$.

On considère alors une collection de modèles $\{S_J, J \in \mathcal{J}\}$ où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^*$; et la collection d'estimateurs correspondante $\{T_J, J \in \mathcal{J}\}$.

On souhaite rejeter l'hypothèse nulle s'il existe un $J \in \mathcal{J}$ pour lequel l'estimateur T_J "est trop grand".

Lemme

La loi conditionnelle de $(X_1, ..., X_n)$ sachant $N_L = n$ est la loi d'un réarrangement croissant de n variables aléatoires iid notée $(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_n)$ de densité $\dfrac{s(x)}{\int_0^1 s(y)dy} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

Sous (H_0) :

- s est constante sur $[0,1]$;
- $(\tilde{X}_i)_{1\leq i\leq n}$ iid de loi uniforme sur $[0,1]$.

Notation : $q_J^{(n)}(u)$: le quantile d'ordre $(1-u)$ associé à la loi de $T_J|N_L = n$ (sous (H_0)).

On obtient alors $\mathbb{P}_{(H_0)}(T_J - q_J^{(n)}(u) > 0|N_L = n) = u \quad \forall u \in]0,1[$.

On définit alors la statistique $\mathcal{T}_\alpha = \sup_{J\in\mathcal{J}}(T_J - q_J^{(N_L)}(u_{J,\alpha}^{(N_L)}))$, associée au test statistique

$$\phi_\alpha = \mathbb{1}_{\mathcal{T}_\alpha > 0};$$

où $u_{J,\alpha}^{(N_L)}$ reste à déterminer pour que le test soit de niveau α.

Sous (H_0) :

- s est constante sur $[0,1]$;
- $(\tilde{X}_i)_{1\leq i\leq n}$ iid de loi uniforme sur $[0,1]$.

Notation : $q_J^{(n)}(u)$: le quantile d'ordre $(1-u)$ associé à la loi de $T_J|N_L=n$ (sous (H_0)).

On obtient alors $\mathbb{P}_{(H_0)}(T_J - q_J^{(n)}(u) > 0|N_L=n) = u \quad \forall u \in]0,1[$.

On définit alors la statistique $\mathcal{T}_\alpha = \sup_{J\in\mathcal{J}}(T_J - q_J^{(N_L)}(u_{J,\alpha}^{(N_L)}))$, associée au test statistique

$$\phi_\alpha = \mathbb{1}_{\mathcal{T}_\alpha>0};$$

où $u_{J,\alpha}^{(N_L)}$ reste à déterminer pour que le test soit de niveau α.

Choix du quantile - Erreur de première espèce

Méthode 1 : Procédure de Bonferroni.

On pose, pour tout $J \in \mathcal{J}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{J,\alpha}^{(n)} = \frac{\alpha}{|\mathcal{J}|}.$$

Méthode 2 : d'après l'article [2]

L'article suggère de poser, pour tout $J \in \mathcal{J}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{J,\alpha}^{(n)} = e^{-W_J} u_\alpha^{(n)}$$

où

$$u_\alpha^{(n)} = \sup\{u \in]0,1[, \sup_{s \in \mathcal{S}_0} \mathbb{P}_s \left(\sup_{J \in \mathcal{J}} (T_J - q_J^{(n)}(ue^{-W_J})) > 0 | N_L = n \right) \leq \alpha\},$$

et $\{W_J, J \in \mathcal{J}\}$ une famille de poids positifs tel que $\sum_{J \in \mathcal{J}} e^{-W_J} \leq 1.$

Théorème

On suppose que $s \in \mathbb{L}^\infty([0,1])$ et que $L \geq 1$. On fixe les niveaux $\alpha, \beta \in]0,1[$, et on considère le test ϕ_α de niveau α construit dans la section précédente. S'il existe des constantes $C_1(\alpha, \beta, ||s||_\infty)$, $C_2(\alpha,\beta)$, C_3, $C_4(\beta)$ et C_5 tel que s vérifie

$$d^2(s, \mathcal{S}_0) > \inf_{J \in \mathcal{J}} \{||s - s_J||^2 + C_1(\alpha, \beta, ||s||_\infty)\frac{\sqrt{D_J}}{L} + C_2(\alpha,\beta)\frac{D_J}{L^2} + \left(C_3 \int_0^1 s(x)dx + C_4(\beta)\right)\left(\frac{\sqrt{D_J W_J}}{L} + \frac{W_J}{L}\right) + C_5 \frac{D_J W_J^2}{L^2}\},$$

alors

$$\mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) \leq \beta.$$

Démonstration :
On pose $E_{\Lambda_J} = \sum_{j/(j,k)\in\Lambda_J} 2^j$.

Proposition

Soient $s \in \mathbb{L}^\infty([0,1])$ et $\alpha, \beta \in]0,1[$. On suppose qu'il existe une quantité positive $A_{J,\alpha,\beta}$ tel que $\mathbb{P}_s(q_J^{(N_L)}(u_{J,\alpha}^{(N_L)}) \geq A_{J,\alpha,\beta}) \leq \frac{\beta}{3}$. S'il existe des constantes positives $C_1(\beta, ||s||_\infty)$ et $C_2(\beta)$ telles que

$$d^2(s,\mathcal{S}_0) > \inf_{J\in\mathcal{J}}\{||s-s_J||^2 + C_1(\beta,||s||_\infty)\left(\frac{\sqrt{D_J}}{L} + \frac{\sqrt{E_{\Lambda_J}}}{L^{3/2}}\right) + C_2(\beta)\frac{E_{\Lambda_J}}{L^2} + A_{J,\alpha,\beta}\},$$

alors $\quad \mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) \leq \beta.$

Lemme

Soient $\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_n$ des variables aléatoires iid uniformément distribuées sur $[0,1]$. Il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(T_J \geq \frac{Cn}{L^2}\left(\sqrt{D_J x} + x + \frac{E_{\Lambda_J} x^2}{n \vee 1}\right)\right) \leq 2,77 e^{-x}.$$

Proposition

On suppose que $\ln\ln L \geq 1$. On fixe les niveaux $\alpha, \beta \in]0,1[$ et on considère ϕ_α, le test défini précédemment avec $\mathcal{J} = \{1, ..., \lfloor \log_2(L^2/(\ln\ln L)^3 \rfloor\}$ et $W_J = \ln|\mathcal{J}|$ pour tout $J \in \mathcal{J}$. Pour tout $\sigma > 0, R > 0$ et $R'' > 0$, s'il existe une constante $C(\alpha, \beta, R'', \sigma)$ tel que pour tout $s \in \mathcal{B}^\sigma_{2,\infty}(R) \cap \mathbb{L}^\infty(R'')$ satisfaisant

$$d^2(s, \mathcal{S}_0) > C(\alpha, \beta, R'', \sigma)(R^{2/(4\sigma+1)} \left(\frac{\sqrt{\ln\ln L}}{L}\right)^{4\sigma/(4\sigma+1)} + R^2 \left(\frac{(\ln\ln L)^3}{L^2}\right)^{2\sigma} + \frac{\ln\ln L}{L}),$$

alors

$$\mathbb{P}_s(\phi_\alpha = 0) \leq \beta.$$

Corollaire

Il existe des constantes positives $L_0(\sigma)$ et $C(\alpha, \beta, R, R'', \sigma)$ tel que, si $L > L_0(\sigma)$, alors

$$\rho(\phi_\alpha, \mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap \mathbb{L}^{\infty}(R''), \beta) \leq C(\alpha, \beta, R, R'', \sigma) \left(\frac{\sqrt{\ln \ln L}}{L} \right)^{2\sigma/(4\sigma+1)} .$$

☞ Pour L suffisament grand, le test atteint la borne inférieur déterminée précédemment pour la taux de séparation minimax simultanément sur tous les espaces $\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap W_\gamma(R') \cap \mathbb{L}^{\infty}(R'')$ avec $\sigma \geq \max(\gamma/2, \gamma/(1+2\gamma))$ à un facteur logarithmique près.

- Un autre test basé sur une méthode de seuillage.

Théorème

Soient $R > 0$, $R' > 0$ et $R'' \geq 2$, soient $\alpha, \beta \in]0,1[$ vérifiant $\alpha + \beta \leq 0,59$.

- Si $\sigma \geq \max(\gamma/2, \gamma/(1+2\gamma))$ alors

$$\liminf_{L \to +\infty} L^{2\sigma/(1+4\sigma)} \underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap W_{\gamma}(R') \cap \mathbb{L}^{\infty}(R''), \alpha, \beta) > 0.$$

- Si $\sigma < \gamma/2$ et $\gamma > 1/2$ alors

$$\liminf_{L \to +\infty} \left(\frac{L}{\ln L}\right)^{\gamma/(1+2\gamma)} \underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap W_{\gamma}(R') \cap \mathbb{L}^{\infty}(R''), \alpha, \beta) > 0.$$

- Si $\sigma < \gamma/(1+2\gamma)$ et $\gamma \leq 1/2$ alors

$$\liminf_{L \to +\infty} \left(L^{1/4} \wedge L^{2\gamma/((1+4\sigma)(1+2\gamma))}\right) \underline{\rho}(\mathcal{B}^{\sigma}_{2,\infty}(R) \cap W_{\gamma}(R') \cap \mathbb{L}^{\infty}(R''), \alpha, \beta) > 0.$$

➤ Un autre test basé sur une méthode de seuillage.

➤ Dans [2], on considère des tests construits à partir de la base de Fourier.

- Un autre test basé sur une méthode de seuillage.

- Dans [2], on considère des tests construits à partir de la base de Fourier.

- Etude numérique : évaluer la performance des tests d'un point de vue pratique (estimer la puissance des tests sous plusieurs alternatives par la méthode de Monte-Carlo).