124

ANNEAU DES SÉRIES FORMELLES. APPLICATIONS.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique nulle.

I L'ANNEAU $\mathbb{K}[[X]]$

1 Structure de l'ensemble des séries formelles

Déf 1 : ([SP], VI.1.1)
On note $\mathbb{K}[[X]]$ l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni des opérations suivantes :
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Prop 2 : ([SP], VI.1.1)
$\mathbb{K}[[X]]$ est un anneau commutatif intègre, d'éléments neutres :
pour $+$: $0 := (0)_{n\in\mathbb{N}}$; pour $\cdot$: $1 := (\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (Symbole de Kronecker)

Rq 3 : ([SP], VI.1.1)
On note X la suite $(\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et désormais $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ désignera $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prop 4 : Éléments inversibles ([SP], VI.1.1)
Soit $A := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$.
A est inversible dans $\mathbb{K}[[X]] \Leftrightarrow a_0 \neq 0$.

Ex 5 : ([SP], VI.1.1)
$1-X$ est inversible dans $\mathbb{K}[[X]]$ et $(1-X)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} X^n \in \mathbb{K}[[X]]$.

Déf 6 : Valuation ([SP], VI.1.1)
Soit $A \in \mathbb{K}[[X]] \setminus \{0\}$, $\nu(A) = \min\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ est la valuation de A.
Par convention, $\nu(0) = +\infty$.

Prop 7 : ([SP], VI.1.1)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[[X]]$; on a : $\nu(A+B) \geq \min\{\nu(A), \nu(B)\}$ et $\nu(A.B) = \nu(A)+\nu(B)$.

Prop 8 : Idéaux ([FG], exo 2.25)
Les idéaux non-nuls de $\mathbb{K}[[X]]$ sont les (X^p) où $p\in\mathbb{N}$.
$\mathbb{K}[[X]]$ est donc principal et X est son seul irréductible (à association près).

Prop 9 : ([FG], exo 2.25)
Muni du stathme ν, $\mathbb{K}[[X]]$ est un anneau euclidien.

Thm 10 : ([SP], VI.1.1)
On note $\mathbb{K}(X)_0$ l'ensemble des fractions rationnelles qui n'ont pas 0 pour pôle et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
L'application $\psi : \begin{array}{|lcl} \mathbb{K}(X)_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}[[X]] \\ \frac{P}{Q} & \longmapsto & P.Q^{-1} \end{array}$ est un morphisme d'anneaux injectif.

Rq 11 : Cela permet d'identifier des fractions rationnelles à des séries formelles. Par exemple $\frac{1}{1-X} \in \mathbb{K}(X)_0$ et $\psi\left(\frac{1}{1-X}\right) = (1-X)^{-1} \in \mathbb{K}[[X]]$; on écrit dans $\mathbb{K}[[X]]$: $\frac{1}{1-X} = \sum_{n\in\mathbb{N}} X^n$.

Ex 12 : ([ADF], exo VIII.5.3)
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$; soient $u, v \in \mathbb{N}$, tels que $up - vq = 1$.
Alors $\frac{1}{(1-X^p)(1-X^q)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left\lfloor \frac{un}{q} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{-vn}{p} \right\rfloor \right) X^n$ dans $\mathbb{R}[[X]]$.

2 Opérations

Déf 13 : Sommabilité ([AF], VIII.4)
Soit $I = \mathbb{N}$; $(S_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}[[X]]^I$ où $S_i = (a_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $i \in I$.
$(S_i)_{i\in I}$ est sommable $\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}$, $\{i\in I \mid a_{i,n} \neq 0\}$ est fini.
On pose alors $c_n = \sum_{i\in I} a_{i,n}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[[X]]$ est appelée somme de la famille $(S_i)_{i\in I}$, et notée $\sum_{i\in I} S_i$.

Rq 14 : ([AF], VIII.4)
La famille $(a_i X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable. Cela justifie la notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$, quand $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[[X]]$.

Ex 15 : ([AF], VIII.4)
Soit $S \in \mathbb{K}[[X]]$, avec $\nu(S) \geq 1$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\nu(b_n S^n) \geq n$ et la famille $(b_n S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Déf 16 : Composition ([AF], VIII.4)
Soit $S \in \mathbb{K}[[X]]$ avec $\nu(S) \geq 1$ et $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} t_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$
On définit la composée $T \circ S = \sum_{n\in\mathbb{N}} t_n S^n \in \mathbb{K}[[X]]$.

Ex 17 :
Si $S \in \mathbb{K}[[X]]$ et $\nu(S) \geq 1$, $1-S \in \mathbb{K}[[X]]^\times$ et $(1-S)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} S^n$.

App 18 : Polynômes de Tchebychev de 2nde espèce ([AF], VIII.5)
On définit U_n sur $]-1,1[$ par : $U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.
En décomposant de deux façons différentes $F = \frac{1}{1-2X\cos\theta + X^2}$ où $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$
on montre que $U_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} X^{n-2k}$

Prop 19 : ([AF], VIII.4)
Soient $S, T, U \in \mathbb{K}[[X]]$ avec $\nu(S), \nu(T) \geq 1$. Alors :
1) $\nu(U \circ S) = \nu(U)\,\nu(S)$
2) L'application $\begin{array}{|lcl} \mathbb{K}[[X]] & \longrightarrow & \mathbb{K}[[X]] \\ V & \longmapsto & V \circ S \end{array}$ est un morphisme d'anneaux
3) $U \circ (T \circ S) = (U \circ T) \circ S$ (associativité)

Déf 20 : Dérivation ([SP], VI.1.2)
Soit $A \in \mathbb{K}[[X]]$, on appelle série formelle dérivée de A la série :
$A' = D(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n X^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} X^n$.

Prop 21 : ([SP], VI.1.2)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[[X]]$.
1) $A' = 0 \Leftrightarrow A \in \mathbb{K}$.
2) $(AB)' = AB' + A'B$ et si $A \in \mathbb{K}[[X]]^\times$, $(A^{-1})' = -A'.A^{-2}$
3) Si $v(A) \geq 1$, alors $(B \circ A)' = A'.B' \circ A$.

3 Quelques séries formelles usuelles dans $\mathbb{C}[[X]]$

Ex 22 : ([AF], VIII.5)
$\exp(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} X^n$; $\sin(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} X^{2n+1}$; $\ln(1+X) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n$
Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $(1+X)^\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{\alpha}{n} X^n$ où $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ et $\binom{\alpha}{0} = 1$.

App 23 : Dénombrement dans $\mathfrak{S}_n$ ([AF], VIII.5 + [ADF], exo VIII.5.7)
- D_n : nombre de dérangements (permutations sans point fixe) dans $\mathfrak{S}_n$.
On a : $D_0 = 1$, $D_1 = 0$ et pour $n \geq 2$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$
On pose $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{D_n}{n!} X^n$ et on a : $S = \frac{\exp(-X)}{1-X}$. D'où $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
- I_n : nombre d'involutions ($\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma^2 = Id$) dans $\mathfrak{S}_n$.
On a : $I_0 = I_1 = 1$ et pour $n \geq 2$, $I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$
On pose $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{I_n}{n!} X^n$ et on a : $S = \exp(X + \frac{X^2}{2})$. D'où $I_n = \sum_{p+2q=n} \frac{n!}{p!q!2^q}$

App 24 : Nombres de Bell ([XENSAl1, exo 1.6)
B_n : nombre de partitions de l'ensemble $[[1,n]]$.
On a $B_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.
On pose $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{B_n}{n!} X^n$ et on a : $F = \exp(\exp(X)-1)$. D'où $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$.

II SÉRIES GÉNÉRATRICES ET SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

1 Séries génératrices

Déf 25 : ([SP], VI.1.3)
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; alors $(S_n X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et $\sum_{n\in\mathbb{N}} S_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$ est appelée série génératrice de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex 26 : ([SP], VI.1.3)
$S_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \rightsquigarrow \frac{1}{1-X^2}$; $S_n = n+1 \rightsquigarrow \frac{1}{(1-X)^2}$; $S_n = 2^n \rightsquigarrow \frac{1}{1-2X}$.

App 27 : ([SP], VI.1.3)
On note $G = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^3+2n-1}{n!} X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ et on a : $G = (X^3+3X^2+3X-1)\exp(X)+1$.
La convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ en 1 fournit alors : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2n-1}{n!} = 6e+1$.

App 28 : Partitions d'un entier en parts fixées ([XENSAn2], exo 3.15)
Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers dans leur ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$;
$u_n = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n\}$
Alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

DÉVELOPPEMENT N°1

App 29 : Façons de faire n € avec des pièces de 1, 2 ou 5 € ([XENSAn2], exo 3.15)
u_n : ce nombre de façons ; on a : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n X^n = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^5)}$
On obtient $u_n = \frac{(n+1)(n+2)}{20} + \frac{n+1}{4} + \frac{13}{40} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{\varepsilon_n}{5}$ où $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv 0;2 [5] \\ 0 \text{ si } n \equiv 1 [5] \\ -1 \text{ si } n \equiv 3;4 [5] \end{cases}$

App 30 : Formules de Newton ([FG], exo 5.6)
Soit $P = (X-X_1)\dots(X-X_n) \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n][X]$.
On note $\sigma_1 = X_1 + \dots + X_n$, $\sigma_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + \dots + X_{n-1}X_n$, …, $\sigma_n = X_1 \dots X_n$ les fonctions symétriques élémentaires en $X_1, \dots, X_n$; et pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k$.
En considérant $S = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} N_k X^k\right)(1 - \sigma_1 X + \dots + (-1)^n \sigma_n X^n)$, on montre que :
- si $p \in [[1,n]]$: $N_p - \sigma_1 N_{p-1} + \dots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} N_1 + (-1)^p \sigma_p p = 0$
- si $p \geq n+1$: $N_p - \sigma_1 N_{p-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} N_{p-n+1} + (-1)^n \sigma_n N_{p-n} = 0$.

App 31 : Théorème de Molien ([Lei], p.95)
Soit $u \in Gl_n(\mathbb{C})$; pour $P \in A := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, on pose :
$\sigma(u)(P) = P(u^{-1}(X_1, \dots, X_n)^t)$.
Alors :
1) L'application $\sigma : Gl_n(\mathbb{C}) \longrightarrow Aut(A)$ est bien définie et est un morphisme de groupes. Elle induit, par restriction, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un morphisme $\sigma_k : Gl_n(\mathbb{C}) \longrightarrow Aut(A_k)$, où A_k désigne l'ensemble des polynômes homogènes de degré k.
2) Si G est un sous-groupe fini de $Gl_n(\mathbb{C})$,
Alors G agit aussi sur A_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :
$$\frac{1}{\#G} \sum_{g\in G} \frac{1}{\det(I_n - gX)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \dim(A_k^G) X^k.$$

DÉVELOPPEMENT N°2

2 Suites récurrentes linéaires ([SP], VI.2)

Déf 32 :
On dit qu'une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre k à partir d'un certain rang $k_0 \in \mathbb{N}$, s'il existe $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ tels que : $\forall n \geq k_0$, $S_n = a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \dots + a_k S_{n-k}$.
Dans ce cas, son polynôme caractéristique est le polynôme
$P = X^k - a_1 X^{k-1} - a_2 X^{k-2} - \dots - a_k$.

Prop 33: (cf thm 10)
Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, S sa série génératrice.
$S \in \mathrm{Im}(\psi) \Leftrightarrow (s_n)_n$ est récurrente linéaire à partir d'un certain rang.

Ex 34: Suite de Fibonacci
On définit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $f_0=0$, $f_1=1$ et $\forall n\geq 2$, $f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$.
On pose $F=\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n X^n$ et on a: $F=\frac{1}{1-X-X^2}$.
On en déduit: $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n = \frac{\varphi^n-\tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$ où $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\tilde{\varphi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

III ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS $\mathbb{K}[[X]]$

1 Suites P-récurrentes et séries Δ-finies ([SP], VI.3.1)

Déf 35:
Une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est polynomialement récurrente (P-récurrente)
$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}, \exists P_0,\dots,P_k \in \mathbb{K}[X], \exists k_0\geq k, \forall n\geq k, P_k(n)s_{n+k}+\dots+P_0(n)s_n=0.$

Ex 36:
La suite qui fournit la série exponentielle est P-récurrente car elle vérifie: $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1}=a_n$.

Déf 37:
Une série $S\in\mathbb{K}[[X]]$ est différentiellement finie (Δ-finie)
$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}, \exists Q_0,\dots,Q_k\in\mathbb{K}[X],\ Q_kS^{(k)}+\dots+Q_1S'+Q_0S=0$
$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}, \exists Q_0,\dots,Q_k,Q\in\mathbb{K}[X],\ Q_kS^{(k)}+\dots+Q_1S'+Q_0S=Q.$

Ex 38:
$\exp(X)\in\mathbb{K}[[X]]$ est Δ-finie car: $(\exp(X))'=\exp(X)$.

Thm 39:
Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $S\in\mathbb{K}[[X]]$ sa série génératrice.
On a: $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est P-récurrente $\Leftrightarrow$ S est Δ-finie.

Coro 40:
Soit (E) une équation différentielle d'ordre k dans $\mathbb{K}[[X]]$, et à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$.
On note d le degré maximal des coefficients polynomiaux de (E).
Alors (E) possède des solutions définies à un polynôme près, et ce polynôme est de degré au plus $d+k$.

Ex 41:
Le système $\begin{cases} X^2U'+(2X-1)U+1=0 \\ u_0=1 \end{cases}$ possède une unique solution:
$U=\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)!\,X^n$.

2 Application aux nombres de Catalan ([SP], VI.4)

Déf 42:
Soient $(n+1)$ nombres $x_0,\dots,x_n$ placés dans un ordre fixé, dont le produit doit être calculé.
On note γ_n le nombre de manières d'installer des parenthèses dans le produit $x_0x_1\dots x_n$ de sorte que l'ordre dans lequel on effectuera les n multiplications soit complètement fixé.
On convient que $\gamma_0=\gamma_1=1$.

Ex 43:
$\gamma_2=2$: $x_0(x_1x_2)$; $(x_0x_1)x_2$
$\gamma_3=5$: $x_0(x_1(x_2x_3))$; $x_0((x_1x_2)x_3)$; $(x_0(x_1x_2))x_3$; $((x_0x_1)x_2)x_3$; $(x_0x_1)(x_2x_3)$.

Prop 44:
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a: $\gamma_n=\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i\gamma_{n-1-i}$.

→ On note C la série génératrice de $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
→ La relation de récurrence traduit $XC^2-C+1=0$
→ En dérivant, on obtient $C'=\frac{-C^2}{2XC-1}$.
→ Dans $\mathbb{K}(X)[Y]$, XY^2-Y+1 et $2XY-1$ sont premiers entre eux.
On obtient la relation de Bézout:
$$\frac{-2XY+1}{4X-1}(2XY-1)+\frac{4X}{4X-1}(XY^2-Y+1)=1$$
→ On en déduit que:
$$\frac{1}{2XC-1}=\frac{-2XC+1}{4X-1}$$
→ Puis $C'=C^3\cdot\frac{2X}{4X-1}+C^2\cdot\frac{-1}{4X-1}$
→ Par division euclidienne dans $\mathbb{K}(X)[Y]$, $C'=C\cdot\frac{-(2X-1)}{X(4X-1)}-\frac{1}{X(4X-1)}$
→ Donc C est Δ-finie: $X(4X-1)C'+(2X-1)C+1=0$
→ On obtient une relation de récurrence:
$$\forall n\in\mathbb{N},\ (2+n)\gamma_{n+1}=(4n+2)\gamma_n,\ \text{avec } \gamma_0=1.$$
→ Et on obtient: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\gamma_n=\binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$.

Références :

[ADF] : Arnaudiès, Delezoïde, Fraysse — Exercices résolus d'algèbre du cours de mathématiques 1
(Dunod, 1994)
[AF] : Arnaudiès, Fraysse — Cours de mathématiques 1 Algèbre (Dunod, 1996)
[FG] : Francinou, Gianella — Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 1
(Masson, 1997)
[Lei] : Leichtnam — Exercices corrigés de mathématiques Polytechnique - ENS Algèbre & Géométrie
(Ellipses, 1999)
[SP] : Saux-Picart — Cours de calcul formel Algorithmes fondamentaux
(Ellipses, 1999)
[XENS] : Francinou, Gianella, Nicolas — Exercices de mathématiques Oraux X-ENS
(Cassini ; Algèbre 1 : 2001, Analyse 2 : 2004)