155

ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES EN DIMENSION FINIE.

Cadre : E est un K-espace vectoriel de dimension $1 \leq n < \infty$, où K est un corps commutatif. On procède à l'identification $\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n(K)$.

I DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1 Éléments propres

Déf 1 : ([G-Al], 4.1.1)
Soit $\lambda \in K$, $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que λ est valeur propre de f si $f - \lambda id_E$ est non-injective, ie s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
Alors on dit que x est vecteur propre de f associé à λ.
On appelle spectre de f, noté $Sp(f)$, l'ensemble des valeurs propres de f.

Déf 2 : ([G-Al], 4.1.1)
Soit $\lambda \in Sp(f)$.
L'ensemble $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_E)$ est appelé sous-espace propre de f associé à λ.

Rq 3 : L'ensemble $E_\lambda(f)$ est f-stable, ie : $f(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$.

Ex 4 : Soit $r_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ et de centre O.
Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $Sp(r_\theta) = \emptyset$.

Prop 5 : ([G-Al], 4.1.1)
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de f, deux à deux distinctes.
Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_k}(f)$ sont en somme directe.

2 Polynômes d'endomorphismes et idéal annulateur

Déf 6 : Polynôme d'endomorphisme ([G-Al], 4.2.1)
Si $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i \in K[X]$,
On définit $P(f) = a_0 id_E + a_1 f + \dots + a_p f^p \in \mathcal{L}(E)$.

Déf 7 : ([G-Al], 4.2.1)
On définit le morphisme de K-algèbres $\psi_f : \left| \begin{array}{ccc} K[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(f) \end{array} \right.$.
On appelle $\mathrm{Im}\, \psi_f =: K[f]$ l'algèbre des polynômes en f.
$\mathrm{Ker}\, \psi_f$ est un idéal de $K[X]$ non-réduit à (0) ; il est engendré par un unique polynôme unitaire, appelé polynôme minimal de f, et noté π_f.

Ex 8 :
- Si f est nilpotent d'indice r, alors $\pi_f = X^r$
- Si f est un projecteur $\neq Id, \neq 0$, alors $\pi_f = X^2 - X$.
- Si f est une symétrie $\neq \pm Id$, alors $\pi_f = X^2 - 1$.

Rq 9 : $\forall P \in K[X]$, $\mathrm{Ker}\, P(f)$ et $\mathrm{Im}\, P(f)$ sont f-stables.

Thm 10 : Décomposition des noyaux ([G-Al], 4.2.1)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_k \in K[X]$, avec les polynômes P_i premiers entre eux deux à deux.
Alors $\mathrm{Ker}\, P(f) = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\, P_k(f)$.

Ex 11 : On suppose $car(K) \neq 2$.
- Si p est un projecteur non-trivial, alors $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Ker}(p - id_E)$.
- Si s est une symétrie non-triviale, alors $E = \mathrm{Ker}(s - id_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + id_E)$.

Prop 12 : ([G-Al], 4.2.2)
Les valeurs propres de f sont les racines de π_f.

App 13 : ([COG], prop 5.3.4)
Si K est algébriquement clos, alors $Sp(f) \neq \emptyset$.

C-Ex 14 : C'est faux si $\dim E = +\infty$. ([COG], rq 5.3.1)
Prendre $K = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}[X]$; $f : \left| \begin{array}{l} E \to E \\ P \mapsto XP \end{array} \right.$; $Sp(f) = \emptyset$.

3 Polynôme caractéristique

Déf 15 : Polynôme caractéristique d'une matrice ([COG], 5.3.1)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$; on pose $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Prop 16 : ([COG], 5.3.1)
Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
Ceci permet de définir le polynôme caractéristique χ_f de f comme celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

Ex 17 :
- Si f est nilpotent, alors $\chi_f = X^n$
- Si f est un projecteur, alors $\chi_f = X^p(1-X)^{n-p}$ où $p = \dim(\mathrm{Ker}\, f)$.

Prop 18 : ([COG], prop 5.3.1)
Les valeurs propres de f sont les racines de χ_f.

Prop 19 : ([COG], prop. 5.3.3)
Soit F un sev stable par f.
Alors on a : $\chi_{f_{|F}} \mid \chi_f$.

Prop 20 : ([G-Al], prop 4.1.5)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$ racine de multiplicité m_λ dans χ_f.
Alors on a : $1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq m_\lambda$.

Thm 21 : Cayley-Hamilton ([G-Al], 4.2.3)
On a : $\chi_f(f) = 0$.

Rq 22 : On en déduit $\pi_f \mid \chi_f$ et $\deg \pi_f \leq n$.

II DIAGONALISABILITÉ

1 Définition et Critères de diagonalisabilité.

Déf 23: ([G-Al], 4.1.3)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

Rq 24: ([G-Al], 4.1.3)
f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ sa matrice dans n'importe quelle base est diagonalisable.

Prop 25: ([G-Al], 4.1.3)
Si χ_f est scindé à racines simples sur K, al
Alors f est diagonalisable.

Thm 26: ([G-Al], 4.1.3) + ([Gri], thm 6.10) + ([Gri], thm 6.13) + ([OA], thm 4.41).
S'équivalent:
1) f est diagonalisable
2) χ_f est scindé sur K et pour toute racine λ_i de χ_f d'ordre h_i, $\dim E_{\lambda_i}(f) = h_i$.
3) On a: $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(f)$, où $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.
4) On a: $\dim E = \dim E_{\lambda_1}(f) + \dots + \dim E_{\lambda_p}(f)$ où $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.
5) χ_f est scindé sur K et la somme des multiplicités des racines vaut n.
6) Il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.
7) π_f est scindé à racines simples.

Ex 27: ([OA], ex 4.42-43)
- Les projecteurs sont diagonalisables.
- Si car$(K) \neq 2$, alors les symétries sont diagonalisables.
  ↳ $\begin{vmatrix} \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K) \\ A \mapsto {}^tA \end{vmatrix}$ est ainsi diagonalisable.

App 28: Si $K = \mathbb{F}_q$, alors u est diagonalisable $\Leftrightarrow u^q - u = 0$ ([OA], ex 4.44)

App 29: Théorème de Burnside ([XENS-Al2], exo 3.8)
Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que: $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall A \in G, A^N = I_n$.
Alors $\#G < \infty$.

Ex 30: ([Man], ex. VIII. 1.14-15)
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable.
  Alors $B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(K)$ est diagonalisable.
- Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(K)$.
  Si $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(K)$ est diagonalisable, alors A et C sont diagonalisables.

Ex 31: ([Gri], ex 6.6.3)
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

Cor 32: ([OA], app 4.45)
Si f est diagonalisable et si F est un sev f-stable de E,
Alors $f_{|F}$ est diagonalisable.

2 Conséquences topologiques. ([OA], 4.3.3)

Ici, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toutes les normes sur $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(K)$ sont équivalentes, et on munit tout sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(K)$ de la topologie induite.
Désormais, notons:
$\mathcal{D}_n(K)$: l'ensemble des matrices diagonalisables
$\mathcal{T}_n(K)$: l'ensemble des matrices trigonalisables
$\mathcal{C}_n(K)$: l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distincts.

Prop 33: Cas complexe.
$\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; c'est l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Prop 34: Cas réel.
$\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on a: $\overline{\mathcal{C}_n(\mathbb{R})} = \overline{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

App 35: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$.

3 Diagonalisation simultanée.

Thm 36: ([OA], prop 4.50)
Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant 2 à 2.
On suppose que chacun des f_i est diagonalisable.
Alors il existe une base de E dans laquelle les matrices des f_i sont toutes diagonales.

Rq 37: Si des endomorphismes sont co-diagonalisables, ([OA], rq 4.51)
Alors ils commutent.

Cor 38: ([OA], rq 4.51)
La somme et la composée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent sont diagonalisables.

Ex 39: ([OA], exo 4.13)
Soit $U, V \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$,
Alors $\Phi_{U,V}: \begin{vmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \longmapsto UM - MV \end{vmatrix}$ est diagonalisable.

Ex 40: Crochet de Lie ([OA], exo 4.14)
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $ad_A: \begin{vmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \longmapsto AM - MA \end{vmatrix}$
Alors A est diagonalisable $\Leftrightarrow ad_A$ est diagonalisable.

III DÉCOMPOSITION DE DUNFORD

DÉVELOPPEMENT N°1.

Thm 41: ([G-Al], thm 4.43)
On suppose que χ_f est scindé sur K, $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$, tel que:
- d est diagonalisable, n est nilpotent
- $f = d+n$ et $d \circ n = n \circ d$.

De plus, $(d,n) \in K[f]^2$.

App 42: ([COG], exo 5.6.2)
L'exponentielle est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $Gl_n(\mathbb{C})$.

App 43:
Si χ_f est scindé, alors f diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp(f)$ diagonalisable.

Ex 44: Calcul pratique de la décomposition de Dunford ([G-Al], 4.4.2)
Si $F = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{r_i}$ annule f, on décompose $\frac{1}{F}$ en éléments simples dans $K(X)$, puis on obtient $\frac{1}{F} = \sum_{i=1}^{s} \frac{U_i}{(X-\lambda_i)^{r_i}}$ où $U_i \in K[X]$.
Cela fournit $1 = \sum_{i=1}^{s} U_i Q_i$, où $Q_i = \prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{r_j}$
On pose $P_i = (U_i Q_i)(f)$; on obtient $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i$ et $n = \sum_{i=1}^{s}(f-\lambda_i id_E)P_i$.

App 45: Calcul pratique de l'exponentielle ([G-Al], 4.4.2)
On montre que $d^p = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^p P_i$ et $n^p = \sum_{i=1}^{s}(f-\lambda_i id_E)^p P_i$.
D'où $\exp(d) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^p}{p!} = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} P_i$ et $\exp(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^p}{p!} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{p=0}^{r_i-1} \frac{(f-\lambda_i id_E)^p}{p!} P_i$.
Ainsi $\exp(f) = \exp(d)\exp(n) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} \sum_{p=0}^{r_i-1} \frac{(f-\lambda_i id_E)^p}{p!} P_i$.

Prop 46: ([OA], ex 4.72)
Soit $\varphi : \begin{array}{|l} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \longmapsto D \end{array}$, où D désigne la matrice diagonalisable associée à M par la décomposition de Dunford.
Alors, si $n \geq 2$, φ n'est pas continue.

IV THÉORÈMES SPECTRAUX

Désormais, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

Prop 47: ([G-Al], 5.2.4)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé adjoint de f, tel que: $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, alors $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\overline{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)}$.

1 Endomorphismes normaux

Déf 48: ([G-Al], 5.3.2)
$f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $ff^* = f^*f$; $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale si $M{}^t\overline{M} = {}^t\overline{M}M$.

Thm 49: ([G-Al], 5.3.2)
Ici $K = \mathbb{C}$, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. S'équivalent:
1) f est normal
2) f est diagonalisable dans une base orthonormée de E.
3) f et f^* se diagonalisent dans une même base orthonormée.

Déf 50: ([G-Al], 5.2.3)
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tAA = I_n$, A est dite orthogonale.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie ${}^t\overline{A}A = I_n$, A est dite unitaire.

Cor 51: ([G-Al], 5.3.2)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; M est normale $\Leftrightarrow$ $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, ${}^t\overline{P}MP$ est diagonale.

C-Ex 52: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est normale mais non-diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

DÉVELOPPEMENT N°2

Thm 53: ([G-Al], 5.3.2)
Ici $K = \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ est normale.
Alors il existe une base orthogonale $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de f est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ci-contre:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{matrix}} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & \boxed{\begin{matrix} a_s & -b_s \\ b_s & a_s \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Thm 54: ([G-Al], 5.3.2)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\overline{M} = -M$.
Alors il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire telle que ${}^t\overline{U}MU$ soit diagonale à valeurs imaginaires pures.

Prop 55: ([G-Al], 5.3.2)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que ${}^tM = -M$.
(ie: M est antisymétrique).
Alors il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale, telle que ${}^tPMP$ soit la matrice ci-contre.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -b_s \\ b_s & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

2 Endomorphismes auto-adjoints.

Déf 56:
$f \in \mathcal{L}(E)$ est dit auto-adjoint si $f = f^*$.
$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si $M = {}^tM (= {}^t\overline{M})$.
$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $M = {}^t\overline{M}$.

Thm 57: ([G-Al], 5.2.4)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint.
Alors f est diagonalisable en base orthonormée et $Sp(f) \subset \mathbb{R}$
(même si $K = \mathbb{C}$!)

Cor 58: ([G-Al], 5.2.4)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) une matrice symétrique (resp. hermitienne)
Alors il existe une matrice C orthogonale (resp. unitaire) telle que: ${}^t\overline{C}MC$ est diagonale à valeurs réelles.

Références :

[G-Al] : X. Gourdon — Les maths en tête : Algèbre, 2e éd, 2009.

[COG] : M. Cognet — Algèbre linéaire, 1e éd., 2000.

[Gri] : J. Grifone — Algèbre linéaire, 4e éd., 2011.

[OA] : V. Beck, J. Malick, G. Peyré — Objectif Agrégation, 2e éd, 2005.

[XENS-Al2] : S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas — Oraux X-ENS Algèbre 2, 2e éd., 2009

[Man] : R. Mansuy, R. Mneimné — Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes, 1e éd., 2012.