Alessandri III. III A 1 p 141

181

BARYCENTRES DANS UN ESPACE AFFINE RÉEL DE DIMENSION FINIE, CONVEXITÉ. APPLICATIONS.

Cadre : $\mathcal{E}$ est un espace affine réel de dimension $n<\infty$.

I BARYCENTRES

1 Définitions & Premières propriétés ([MER], 1.5.1)

Déf 1 : Système de points pondérés et fonction de Leibniz.

Un système de points pondérés $A_1(\alpha_1),\dots,A_n(\alpha_n)$ est la donnée de n points $A_1,\dots,A_n$ de $\mathcal{E}$ et de n réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

À ce système, on associe la fonction de Leibniz $f(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$.

Rq 2 : Pour tout $O\in\mathcal{E}$, $f(M)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MO}+f(O)$.

* Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$, alors f est constante.
* Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$, alors f est bijective.

Déf 3 : Barycentre

Le barycentre de $A_1(\alpha_1),\dots,A_n(\alpha_n)$ où $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ est l'unique point G vérifiant $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$, ou, de façon équivalente : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$, où O est un point quelconque de $\mathcal{E}$.

Prop 4 : Propriétés de la barycentration.

Soit G le barycentre de $A_1(\alpha_1),\dots,A_n(\alpha_n)$.

1) Homogénéité : $\forall\lambda\in\mathbb{R}^*$, G est barycentre de $A_1(\lambda\alpha_1),\dots,A_n(\lambda\alpha_n)$.

2) Commutativité : $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n$, G est barycentre de $A_{\sigma(1)}(\alpha_{\sigma(1)}),\dots,A_{\sigma(n)}(\alpha_{\sigma(n)})$.

3) Associativité : Soit $J\subset[\![1,n]\!]$, $s=\sum_{i\in J}\alpha_i$; on suppose $s\neq 0$.

Alors G est barycentre de $\{A_i(\alpha_i)\}_{i\notin J}$, $g(s)$, où g barycentre de $\{A_i(\alpha_i)\}_{i\in J}$.

Déf 5 : Isobarycentre

L'isobarycentre de n points $A_1,\dots,A_n$ de $\mathcal{E}$ est le barycentre du système pondéré $A_1(1/n),\dots,A_n(1/n)$.

App 6 :

* Les trois médianes d'un triangle concourent en un point G situé au tiers de chacune d'elles.
* L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le milieu des diagonales et appartient aux droites passant par les milieux de deux côtés opposés.
* L'isobarycentre des sommets d'un tétraèdre est situé aux 3/4 de la base de chacun des segments d'extrémité un sommet et le centre de gravité de la base opposée, et coïncide avec le milieu des segments d'extrémités les milieux de 2 arêtes opposées.

2 Lien entre sous-espaces affines et barycentration ([MER], 1.5.2)

Thm 7 :

Le sous-espace affine engendré par une partie non-vide $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$, est égal à l'ensemble des barycentres des points de $\mathcal{A}$.

Ex 8 :

* Pour 2 points distincts A et B, on obtient la droite (AB).
* Pour 3 points non-alignés A,B et C, on obtient le plan (ABC).

Th 9 :

Soit $\mathcal{F}$ une partie non-vide de $\mathcal{E}$.

$\mathcal{F}$ est un sous-espace affine

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est stable par barycentration

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est stable par barycentration de deux points quelconques

3 Systèmes affinement libres ([MER], 1.5.3)

Thm 10 :

Soit $A_0,A_1,\dots,A_k\in\mathcal{E}$. On a les équivalences :

$\forall j\in[\![0,k]\!]$, la famille $(\overrightarrow{A_jA_i})_{i\neq j}$ est libre

$\Leftrightarrow$ $\forall j\in[\![0,k]\!]$, A_j n'est pas dans le sous-espace affine engendré par les $(A_i)_{i\neq j}$

$\Leftrightarrow$ $\exists j\in[\![0,k]\!]$, la famille $(\overrightarrow{A_jA_i})_{i\neq j}$ est libre.

Déf 11 :

Une famille de points $(A_0,\dots,A_k)$ est dite affinement libre si elle vérifie une des conditions du théorème précédent.

4 Repérage ([MER], 1.6.2)

Déf 12 : Repère affine

Un repère affine (ou une base affine) de $\mathcal{E}$ est un $(n+1)$-uplet $(A_0,\dots,A_n)$ de points affinement libres.

Rq 13 : Cela signifie que $(A_0,\dots,A_n)$ est un repère affine si et seulement si la famille $(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de l'espace vectoriel associé.

Déf 14 : Coordonnées barycentriques

Soit $\mathcal{R}=(A_0,\dots,A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, $M\in\mathcal{E}$.

On appelle système de coordonnées barycentriques de M dans $\mathcal{R}$ tout n-uplet $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ tel que M soit le barycentre de $A_0(\alpha_0),\dots,A_n(\alpha_n)$.

Le système est dit normalisé si $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i=1$.

Thm 15 :

Deux systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point sont proportionnels.

Le système de coordonnées barycentriques normalisé d'un point est unique.

C-Ex 16 : Il faut que $\mathcal{R}$ soit un repère affine !

Si A_0 est le milieu de $[A_1A_2]$,

Alors A_0 est le barycentre de $A_0(1)$, $A_1(0)$ et $A_2(0)$, mais aussi de $A_0(0)$, $A_1(1)$ et $A_2(1)$.

Pourtant, $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas proportionnels.

5 Interprétation en termes d'aires. ([TRU], p.47)

Dans cette sous-section, soit ABC un triangle non-plat.

Soit M un point du plan (ABC), n'appartenant pas à (AB), (BC) ou (CA).

Déf 17 : Aire algébrique.

On définit l'aire algébrique du triangle MBC comme étant son aire géométrique affectée du signe (+) s'il a même orientation que le triangle ABC et du signe (−) sinon.

On définit de même l'aire algébrique de MAB et MCA.

(cf Annexe)

Prop 18 :

Dans le repère (A,B,C), les aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M.

App 19 :

* Le centre du cercle inscrit dans ABC est le barycentre des points pondérés $A(BC)$, $B(AC)$ et $C(AB)$.
* Le centre du cercle circonscrit à ABC est le barycentre des points pondérés $A(\sin 2\hat{A})$, $B(\sin 2\hat{B})$ et $C(\sin 2\hat{C})$.

6 Applications des barycentres

Déf 20 : Application affine ([MER], p.45)

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines réels, associés aux espaces vectoriels E et F.

On dit que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine

$\Leftrightarrow$ il existe $\ell : E \to F$ linéaire et telle que :

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \ell(\overrightarrow{MN}).$$

Thm 21 : ([MER], p.47)

Une application est affine $\Leftrightarrow$ elle conserve le barycentre.

Thm 22 : Ménélaüs ([TRU], p.52)

On considère un triangle ABC et trois points A', B' et C' situés respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB), tous distincts des sommets.

Les points A', B' et C' sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$

Thm 23 : Céva ([TRU], p.51).

On considère un triangle ABC et trois points A', B' et C' situés respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB), tous distincts des sommets.

Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles

$\Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$

II CONVEXITÉ

1 Définitions et exemples ([TAU], 4.2)

Déf 24 :

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$.

B est combinaison convexe de $(A_i)_{i\in I}$

$\Leftrightarrow$ il existe $(t_i)_{i\in I}$ presque nulle, avec $\sum_{i\in I} t_i = 1$ et $B = \sum_{i\in I} t_i A_i$.

Déf 25 :

$\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est étoilée en $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{A}$, $[MN] \subset \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est convexe $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ est étoilée en chacun de ses points.

Ex 26 :

* Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
* Les sous-espaces et les boules de $\mathcal{E}$ sont convexes.
* Toute intersection de convexes est convexe.
* L'image directe et l'image réciproque d'un convexe par une application affine sont convexes. ([MER], p.48) [$\hookrightarrow$ App du thm 21]
* L'adhérence d'un convexe est convexe (continuité de $(M,N) \mapsto (1-t)M + tN$)
* Si A et B sont convexes, alors A+B est convexe.

2 Enveloppe convexe ([TAU], 4.3)

Déf 27 :

L'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$, notée $Cv(\mathcal{A})$, est l'intersection des convexes contenant $\mathcal{A}$. C'est le plus petit convexe contenant $\mathcal{A}$.

Thm 28. Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
Toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.

Prop 29:

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$.

1) $Cv(\mathcal{A})$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{A}$.
2) L'intersection des convexes fermés contenant $\mathcal{A}$ est $\overline{Cv(\mathcal{A})}$.
3) Si $\mathcal{A}$ est convexe et compact, on a : $\mathcal{A} = Cv(\partial \mathcal{A})$
4) Si $\mathcal{A}$ est ouvert, alors $Cv(\mathcal{A})$ l'est aussi.

Rq 30: $\mathcal{A} := \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid xy \geq 1\}$ est fermé, mais $Cv(\mathcal{A}) = \{(0,0)\} \cup (\mathbb{R}^{+*})^2$ ne l'est pas.

Thm 31: Carathéodory

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. Tout élément de $Cv(\mathcal{A})$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de $\mathcal{A}$, avec $k \leq 1 + \dim \mathcal{E}$.

Cor 32:

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
1) Si $\mathcal{A}$ est compact, $Cv(\mathcal{A})$ aussi.
2) Si $\mathcal{A}$ est borné, $Cv(\mathcal{A})$ aussi et $\delta(\mathcal{A}) = \delta(Cv(\mathcal{A}))$.
(On note $\delta(\mathcal{A}) = \sup\{MN \mid M, N \in \mathcal{A}\}$).

DÉVELOPPEMENT N°1

3 Points extrémaux ([TAU], 4.8)

Déf 33:

Soit $\mathcal{A}$ un convexe de $\mathcal{E}$, $M \in \mathcal{A}$.
M est extrémal $\Leftrightarrow \forall P,Q \in \mathcal{A}, \forall t \in [0,1], (M = tP + (1-t)Q \Rightarrow M = P$ ou $M = Q)$.
L'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{A}$ est noté $Extr(\mathcal{A})$.

Ex 34: On a : $Extr(\overline{\mathcal{B}}(0,1)) = \mathcal{S}(0,1)$.

Prop 35:

Soit $\mathcal{A}$ un convexe de $\mathcal{E}$ et $M \in \mathcal{A}$. On a les équivalences entre :
1) $M \in Extr(\mathcal{A})$
2) $\mathcal{A} \setminus \{M\}$ est convexe.
3) Si M est combinaison convexe d'éléments de $\mathcal{A}$, Alors il est égal à un de es éléments.

Thm 36: Krein-Milman.

Pour tout convexe compact non-vide $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$,
On a : $\mathcal{A} = Cv(Extr(\mathcal{A}))$.

4 Applications de la convexité ([TAU], 4.6)

Thm 37: Hahn-Banach

Soit $\mathcal{A}$ un ouvert convexe non-vide et $\mathcal{L}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$, tels que $\mathcal{A} \cap \mathcal{L} = \emptyset$.
Il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ vérifiant $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{H} = \emptyset$.

C-Ex 38: Si $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L} = \{(2,0)\}$ et $\mathcal{A} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}) \cup ([0,1] \times \{0\})$.
(en effet, $\mathcal{A}$ n'est pas ouvert.)

Déf 39:

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{E}$.
1) $\mathcal{H}$ sépare $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ est contenu dans l'un et $\mathcal{B}$ est contenu dans l'autre des demi-espaces fermés déterminés par $\mathcal{H}$.
2) $\mathcal{H}$ sépare strictement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ est contenu dans l'un et $\mathcal{B}$ est contenu dans l'autre des demi-espaces ouverts déterminés par $\mathcal{H}$.

Thm 40:

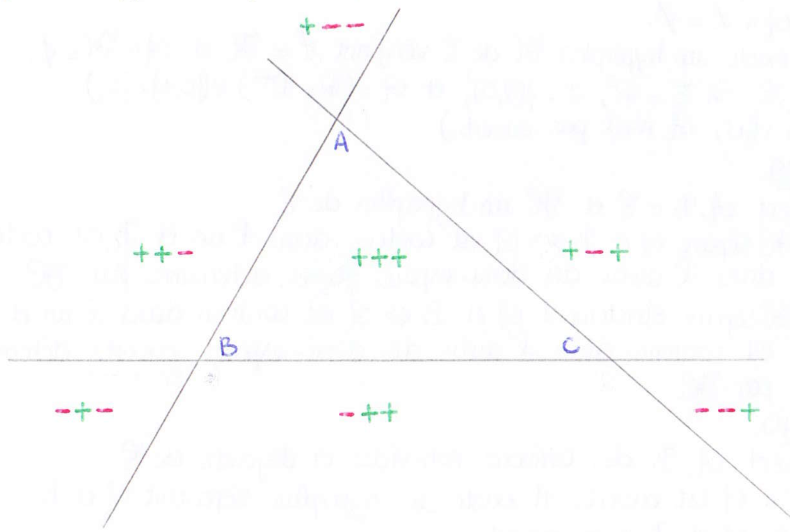
Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des convexes non-vides et disjoints de $\mathcal{E}$.
1) Si $\mathcal{A}$ est ouvert, il existe un hyperplan séparant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
2) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont ouverts, Alors il existe un hyperplan qui les sépare strictement.
3) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont fermés, il existe un hyperplan qui les sépare.
4) Si $\mathcal{A}$ est compact et $\mathcal{B}$ fermé, Alors il existe un hyperplan qui les sépare strictement.

Ajouter le développement n°2
Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$
(→ cf Alessandri)

Éventuellement, théorème de Helly
(→ cf Tauvel).

Annexe :

Signes des aires algébriques des triangles MBC (à gauche), MCA (au milieu), MAB (à droite) :



Références :

[MER] : D.-J. Mercier, Cours de géométrie (2ᵉ édition), EPU, 2005.

[TRU] : B. Truffault, Géométrie élémentaire, Ellipses, 2001

[TAU] : P. Tauvel, Géométrie (2ᵉ édition), Dunod, 2005